Marches Aléatoires avec Conductances Aléatoires

Omar Boukhadra

UNIVERSITÉ DE PROVENCE

U.F.R. M.I.M.

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée par

Omar BOUKHADRA

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Spécialité : **Mathématiques**

Sous la direction de

Pierre MATHIEU

Marches Aléatoires avec Conductances Aléatoires

Soutenue publiquement au CIRM, le 11/05/2010.

JURY

M. Pierre	**MATHIEU**	Université de Provence	Directeur
M. Abdelatif	**B-MADANI**	Université de Sétif	Co-directeur
M. Marek	**BISKUP**	Univ. Californie, LA	Rapporteur
Mme Nina	**GANTERT**	Université de Münster	Rapporteur
M. Takashi	**KUMAGAI**	Université de Kyōto	Examinateur
M. Etienne	**PARDOUX**	Université de Provence	Examinateur

À mon père, Youcef Bey qui a eu le privilège de pouvoir prouver qu'il était un homme de valeur.

Remerciements

A l'achèvement de ce modeste travail, j'ai le plaisir et me dois de remercier sincèrement toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à sa préparation.

Je pense en premier à Pierre Mathieu qui m'a fait l'honneur de diriger cette thèse, auquel je reconnais une pédagogie, une patience et une clairvoyance remarquables, et aussi à Abdellatif Bencherif-Madani, co-directeur, pour son soutien et d'avoir été mon principal argument pour entrer au CMI.

Je remercie Marek Biskup et Nina Gantert qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Cela me rend particulièrement fier et heureux que ce soit eux qui aient évalué mon travail.

Je suis très honoré que Takashi Kumagai, Nina Gantert et Etienne Pardoux aient accepté d'être membres du jury lors de ma soutenance.

Je voudrais aussi remercier Fabienne Castell, Fatiha Messaci, Nadia Pittet, Zaher Mohdeb pour leur soutien.

Enfin, je pense à ma mère Nora qui peut être fière de sa réussite, à ma famille et en même temps à remercier mon oncle Mohamed Haïoun, mon oncle Mohammed Ali Boukhadra, Zohra Aïssani, et sans oublier mes amis.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des "*marches aléatoires en milieu aléatoire*" (Random walks in random environment "RWRE"). Celles-ci, comme leur nom l'indique, présentent deux sources d'aléa : le mouvement de la marche et le milieu qui dicte les règles de déplacement. La combinaison de ces deux aléas de natures différentes fait que les marches aléatoires en milieu aléatoire exhibent des propriétés asymptotiques surprenantes et très différentes de la marche aléatoire simple considérée comme étant le modèle *standard*, notamment le phénomène qui fait l'objet du présent travail, à savoir *le ralentissement des* RWRE, qui est caractérisé par une décroissance *moins rapide* du noyau de la chaleur.

Ce manuscrit rédigé de sorte que ses parties soient pratiquement indépendantes au prix de quelques répétitions, suit l'organisation naturelle suivante. Nous commençons par une introduction qui réunit le matériel nécessaire pour établir les preuves des résultats obtenus et en même temps nous sert à donner un bref aperçu sur les avancées réalisées dans le domaine des RWRE. Ensuite viennent deux chapitres dans lesquels nous présentons le contenu des deux articles faisant le corps de cette thèse. Enfin, nous terminons par une annexe qui réunit les preuves de quelques résultats essentiels à notre étude.

1.1 Modèle

La définition d'une RWRE fait intervenir deux composantes : la première, l'environnement, lequel est choisi de manière aléatoire toutefois gardé fixé tout au long de l'évolution temporelle, la deuxième, la marche aléatoire, laquelle, étant donné un environnement, est une chaîne de Markov homogène dans le temps dont les probabilités de transition dépendent de l'environnement.

Nous commençons par introduire le cadre général que nous réduirons plus bas aux cas qui nous intéressent. Soit (V, E) un graphe (infini, orienté) avec un ensemble dénombrable de sites V et un ensemble d'arêtes $E = \{(v, w)\}$ (nous autorisons, sans l'exiger, le cas $(v, v) \in E$). Pour chaque $v \in V$, nous définissons son *voisinage* N_v par

$$N_v = \{w \in V : (v, w) \in E\},$$

et supposerons tout au long que $|N_v| < \infty$, pour tout $v \in V$.
Pour tout $v \in V$, soit $\mathcal{P}(N_v)$ la collection de mesures de probabilité sur V de support N_v. Un élément de $\mathcal{P}(N_v)$, appelé loi de transition à v, est une fonction mesurable $\omega_v : V \to [0,1]$ satisfaisant :

$$\begin{array}{lll} (a) & \omega_v(w) \geq 0 & \forall w \in V \\ (b) & \omega_v(w) = 0 & \forall w \notin N_v \\ (c) & \sum_{w \in N_v} \omega_v(w) = 1 & \end{array} \tag{1.1.1}$$

Notons que si $v \in N_v$, alors il est possible d'avoir dans (1.1.1) (c) le cas $\omega_v(v) > 0$.

Nous munissons $\mathcal{P}(N_v)$ avec la topologie faible sur les mesures de probabilité, ce qui en fait un espace polonais entraînant une structure de l'espace polonais sur $\Omega = \prod_{v \in V} \mathcal{P}(N_v)$. Nous noterons $\mathcal{F}$ la tribu de Borel sur Ω (qui est la même tribu engendrée par les cylindres). Étant donnée une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ invariante par translation sur $(\Omega, \mathcal{F})$, un *environnement aléatoire* ω est un élément de Ω distribué selon $\mathbb{Q}$ dont nous noterons l'espérance associée par $\mathbb{E}$.

Nous revenons aux classes de marches aléatoires qui nous intéressent. Pour chaque $\omega \in \Omega$, nous définissons *la marche aléatoire dans le milieu aléatoire* ω comme étant la chaîne de Markov temporellement homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans V et de probabilités de transition

$$P_\omega(v, w) = P_\omega(X_{n+1} = w | X_n = v) = \omega_v(w). \tag{1.1.2}$$

Nous utilisons P_v^ω pour noter la loi induite sur $(V^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par les cylindres, et

$$P_v^\omega(X_0 = v) = 1$$

Dans la suite, nous nous référons à $P_v^\omega(\cdot)$ comme étant la loi *quenched* de la marche aléatoire (X_n). Ce dernier terme provient de la métallurgie où quenched signifie *trempé*. Ce terme est également utilisé en physique statistique pour désigner la loi d'un système à désordre fixé, par exemple la position de particules magnétisées dans un alliage neutre. La loi quenched est markovienne et hétérogène spatialement. Notons que pour tout $G \in \mathcal{G}$, l'application

$$\omega \longmapsto P_v^\omega(G)$$

est $\mathcal{F}-$mesurable. Ainsi, nous pouvons définir la mesure $\mathbb{P}_v := \mathbb{Q} \otimes P_v^\omega$ sur $(\Omega \times V^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ par la relation

$$\mathbb{P}_v(F \times G) = \int_F P_v^\omega(G) \mathbb{Q}(\mathrm{d}\omega), \quad F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}.$$

La loi marginale de $\mathbb{P}_v$ sur $V^{\mathbb{N}}$, notée aussi par $\mathbb{P}_v$, à chaque fois que cela ne prête pas à confusion, est appelée la *loi annealed* de la marche aléatoire (X_n) ; notons que sous $\mathbb{P}_v$, (X_n) n'est pas une chaîne de Markov ! mais la loi annealed présente une forte homogénéité spatiale due à la réalisation d'une moyenne sur les environnements. Ce terme provient également de la métallurgie où il signifie *recuit*. Les physiciens l'utilisent aussi pour désigner une moyenne sur le désordre.

1.2 Exemples

Nous choisissons de traiter dans cette thèse les RWRE dans $\mathbb{Z}^d$ et commençons par introduire le modèle le plus célèbre et le plus étudié en dimension 1 sans s'y attarder trop en renvoyant le lecteur pour plus de détails au cours de Saint-Flour de Zeitouni [Zeit04]. Nous nous intéresserons aux cas des dimensions supérieures, auquels cas des questions élémentaires restent sans réponse :

RWRE uni-dimensionnelles sur $\mathbb{Z}$. Le modèle est introduit, en 1967, par le biophysicien Chernov [Cher67], soucieux de comprendre les mécanismes de duplication de l'ADN et des dommages causés à l'ADN. En 1972, Temkin [Tem72] reprend le modèle motivé par des problèmes de génétique et de métallurgie, notamment pour traiter la cinétique des transitions de phase dans des alliages. Ici, nous prenons $V = \mathbb{Z}$ et $E = \cup_{z\in\mathbb{Z}}\{(z, z+1)\}$. Alors, $N_v = \{v-1, v+1\}$ et $\mathcal{P}(N_v)$ peut être identifié au simplexe de dimension deux ; Nous posons $\omega_z^+ := \omega_z(z+1)$, $\omega_z^- := \omega_z(z-1)$ et supposons que $(\omega_z) = \omega_z(\cdot)_{z\in\mathbb{Z}}$ soit une famille de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $]0,1[$, aussi l'environnement suit une loi que nous pouvons notée $\mathbb{Q} = \mu^{\otimes\mathbb{Z}}$, où μ représente la loi de ω_0.

En 1975, Solomon [Sol75] obtient un critère de récurrence-transience pour les marches aléatoires en milieu aléatoire. Définissons $\rho_0 = (1-\omega_0)/\omega_0$. Solomon montre que si $\mathbb{E}[\log \rho_0]$ existe et est nulle, alors ceci est une condition necéssaire et suffisante pour la récurrence de la marche aléatoire. De plus, il établit une loi des grands nombres en ce sens qu'il existe une vitesse $v \in [-1, 1]$ ne dépendant que la loi de l'environnement de sorte que $\mathbb{Q}-$p.s.

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} v.$$

où v vérifie

$$v := \begin{cases} \frac{1-\mathbb{E}[\rho_0]}{1+\mathbb{E}[\rho_0]} > 0 & \text{si } \mathbb{E}[\rho_0] < 1, \\ 0 & \text{si } (\mathbb{E}[\rho_0])^{-1} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho_0], \\ \frac{\mathbb{E}[\rho_0^{-1}]-1}{\mathbb{E}[\rho_0^{-1}]+1} & \text{si } (\mathbb{E}[\rho_0^{-1}])^{-1} > 1. \end{cases}$$

Nous pouvons alors remarquer le fait typique que la marche aléatoire en milieu aléatoire puisse être transiente et de vitesse nulle, à l'opposé du comportement d'une marche aléatoire simple.

Marche de Sinai. Dans le cas récurrent, Sinai [Sin82] observe en 1982 un phénomène intéressant inhérent aux marches aléatoires en milieu aléatoire, à savoir que celles-ci sont beaucoup plus lentes que les marches aléatoires simples. En effet, faisant les quelques hypothèses suivantes sur l'environnement, sous lesquelles la marche aléatoire en milieu aléatoire est appelée *marche de Sinai*,

$$\mathbb{Q}(\delta \leq \omega_0 \leq 1-\delta) = 1, \tag{1.2.1}$$

$$\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{1-\omega_0}{\omega_0}\right)\right] = 0, \tag{1.2.2}$$

$$\sigma^2 := \mathrm{Var}\left[\log\left(\frac{1-\omega_0}{\omega_0}\right)\right] > 0, \tag{1.2.3}$$

Sinai [Sin82] montre que

$$\sigma^2 \frac{X_n}{\log^2 n} \xrightarrow{loi} b_\infty,$$

où b_∞ est une variable aléatoire non-dégénérée et non-gaussienne, qui ne dépend pas de la loi de l'environnement. En 1986, Golosov [Gol86] et Kesten [Kes86a] explicitent la loi de cette variable aléatoire. Il est intéressant d'observer que la renormalisation en $\log^2 n$ contraste avec le comportement asymptotique de la marche aléatoire simple en $\sqrt{n}$, dans le cas récurrent.

Quant au comportement des RWRE dans le cas transient de vitesse nulle, Kesten, Kozlov et Spitzer [KKS86] considèrent le cas transient vers $+\infty$. Ils introduisent un processus de branchement en milieu aléatoire avec immigration, qui tient compte des deux sources d'aléa (l'environnement et le mouvement de la marche aléatoire) et utilisent un résultat de renouvellement sophistiqué, dû à Kesten [Kes73], faisant apparaître l'indice κ tel que $\mathbb{E}[\rho_0^\kappa] = 1$, lequel s'avère être un élément déterminant dans le comportement asymptotique de la marche aléatoire en milieu aléatoire.

RWRE sur $\mathbb{Z}^d$ limitées aux voisins proches. Ici, $V = \mathbb{Z}^d$ et $E = \cup_{z\in\mathbb{Z}^d}\{\cup_{y\sim z}(z,y)\}$, où nous utilisons la notation $y \sim z$ pour représenter les sites dits *voisins proches*, i.e. s'ils sont séparés par une seule arête. Pour tout $v \in V$, N_v contient $2d$ sites, et $\mathcal{P}(N_v)$ est identifié au simplexe de dimension $2d$. Le cas où la marche aléatoire peut rester sur le même site de départ (i.e. $\omega_z(z) > 0$) est parfois autorisé. Contrairement au cas $d = 1$, la chaîne de Markov définie par P_v^ω est en général irreversible.
Une classe importante de RWRE sur $\mathbb{Z}^d$ constituant le modèle considéré dans notre cas sont ***les marches aléatoires avec conductances aléatoires*** que nous verrons plus en détail plus bas. Mais nous pouvons déjà dire que le milieu dans lequel se meuvent de telles marches aléatoires est défini par une famille de variables aléatoires (i.i.d.) que nous noterons $(\omega_b)_{b\in\mathbb{B}^d}$, où $\mathbb{B}^d$ est l'ensemble des paires de sites voisins proches (non-ordonnées) de $\mathbb{Z}^d$. Ainsi, l'environnement aléatoire est une réalisation de la famille $\{\omega_b, b = (x,y), x \sim y, b \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$ suivant une loi $\mathbb{Q}$ de l'environnement. Les probabilités de transition sont définies de sorte que la probabilité pour la marche de traverser une arête donnée b en partant d'un site donné z est la dite "*conductance*" de b, i.e. ω_b, divisée par la somme de toutes les conductances des arêtes partant de z.

Notes Bibliographiques. *Deux bonnes références pour connaître l'évolution et les résultats du domaine dans les années 90, sont les deux volumes du livre de Hughes [Hug95]–[Hug96]. Par ailleurs, nous mentionnons ici d'autres modèles pouvant rentrer dans le cadre introduit plus haut.*

- *RWRE non limitées aux voisins proches : Dans ce modèle, les sauts de la marche ne sont plus réservés qu'aux seuls voisins proches du point de départ. Pour le cas uni-dimensionnel, voir la thèse [Brém02] qui contient aussi un résumé de travaux récents sur le sujet et notamment dans [Key84]. Pour le cas de dimensions supérieures, voir [Var02].*
- *RWRE réversibles : Le premier exemple, ce sont bien les marches aléatoire avec conductance aléatoires. La bibliographie s'est beaucoup enrichie ces dernières années et des références seront citées tout au long du manuscrit.*

– *Marche aléatoires sur les arbres de Galton-Watson : voir [DGZ02]–[LPP96] et [LPP96]–[Piau98]*

1.3 Percolation sur les arêtes

Dans cette section, nous allons établir les définitions élémentaires et la notation de la percolation sur les arêtes dans $\mathbb{Z}^d$. Pour ce faire, la présentation de Grimmett [Grim99] est très appropriée. Nous commençons par introduire quelques idées de la théorie des graphes. Nous rappelons en premier que tout au long du manuscrit, nous utiliserons la lettre d pour représenter la dimension du processus de percolation. Nous notons par $x = (x_1, \ldots, x_d)$ les vecteurs de $\mathbb{Z}^d$ et écrivons x_i pour la $i-$ième coordonnée de x. La distance au graphe $\delta(x, y)$ de x à y est définie par

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|, \tag{1.3.1}$$

et nous écrivons $|x|$ pour la distance $\delta(0, x)$ de l'origine à x. Nous serons amenés à utiliser une autre *distance* dans $\mathbb{Z}^d$ et nous écrivons

$$\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\},$$

en notant que

$$\|x\| \leq |x| \leq d\|x\|$$

Nous pouvons représenter $\mathbb{Z}^d$ comme étant un graphe, qu'on pourrait appeler la *grille cubique $d-$dimensionnelle*, en rajoutant une arête entre toutes les paires x, y de points de $\mathbb{Z}^d$ telles que $\delta(x, y) = 1$. Nous notons cette grille par $\mathbb{L}^d$, et écrivons $\mathbb{Z}^d$ pour l'ensemble des sommets de $\mathbb{L}^d$, et $\mathbb{B}^d$ pour l'ensemble des arêtes. En langage de la théorie des graphes, nous écrivons $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{B}^d)$. Nous penserons souvent de $\mathbb{L}^d$ comme étant un graphe inclus dans $\mathbb{R}^d$, les arêtes étant des segments de droite entre leurs sommets. Quand x et y sont voisins proches, i.e. $\delta(x, y) = 1$, nous représentons l'arête correspondante par $[x, y]$ et disons que l'arête b est incidente au site x si x est l'un de ses sommets.

Nous introduisons maintenant les *graphes aléatoires* et commençons par présenter le cas le plus célèbre et le plus étudié. Soit p tel que $0 \leq p \leq 1$. Nous déclarons chaque arête de $\mathbb{L}^d$ *ouverte* avec probabilité p et *fermée* autrement, indépendamment de toutes les autres arêtes. Plus formellement, nous considérons l'espace de probabilité suivant. Comme ensemble des états de l'environnement, nous prenons $\Omega = \prod_{b \in \mathbb{B}^d} \{0, 1\}$, dont les éléments, représentés par $\omega = \{\omega(b) : b \in \mathbb{B}^d\}$, sont appelés *environnements*. La valeur $\omega(b) = 0$ correspond à l'état dit fermé de l'arête b, et $\omega(b) = 1$ correspond à l'état dit ouvert. Nous notons $\mathcal{F}$ la tribu de Ω générée par les cylindres de dimension finie. Finallement, nous prenons la mesure produit de densité p sur $(\Omega, \mathcal{F})$; ceci est la mesure

$$\mathbb{Q}_p = \prod_{b \in \mathbb{B}^d} \mu_b,$$

où μ_b est la mesure de Bernoulli sur $\{0,1\}$, donnée par

$$\mu_b(\omega(b)=0)=1-p, \quad \mu_b(\omega(b)=1)=p.$$

Un *chemin* de $\mathbb{L}^d$ est une séquence alternée $x_0, b_0, x_1, b_1, ..., b_{n-1}, x_n$ de sites distincts x_i et d'arêtes $b_i=[x_i, x_{i+1}]$; un tel chemin a une longueur n et est dit connecter x_0 à x_n. Un *circuit* est une sequence alternée $x_0, b_0, x_1, b_1, ..., b_{n-1}, x_n, b_n, x_0$ de sites et d'arêtes tels que $x_0, b_0, x_1, b_1, ..., b_{n-1}, x_n$ est un chemin et $b_n=[x_n, x_0]$; un tel circuit a une longueur $n+1$. Nous appelons un chemin ou un circuit ouvert si toutes ses arêtes sont ouvertes, et fermé si toutes ses arêtes sont fermées.

Considérons le sous-graphe de $\mathbb{L}^d$ contenant l'ensemble $\mathbb{Z}^d$ et les arêtes ouvertes seulement. Les parties connectées de ce graphe sont appelées *composantes connexes ouvertes* ou *amas de percolation ouverts*. Nous notons par $\mathcal{C}(x)$ la composante connexe ouverte contenant le site x. L'ensemble des sites de $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble de tous les sites qui sont connectés à x par un chemin ouvert, et les arêtes de $\mathcal{C}(x)$ sont les arêtes ouvertes de $\mathbb{L}^d$ qui joignent les paires de ses derniers sites. En vertu de l'invariance par translation de la grille et de la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_p$, la distribution de $\mathcal{C}(x)$ est indépendante du choix de x. La composante ouverte $\mathcal{C}(0)$ est donc caractéristique de telles composantes, et nous représentons simplement cette composante par $\mathcal{C}$. Occasionnellement, nous utiliserons le terme $\mathcal{C}(x)$ pour representer l'ensemble des sites joints à x par un chemin ouvert. Nous nous intéresserons au volume des composantes connexes et noterons par $|\mathcal{C}(x)|=\#\mathcal{C}(x)$ le nombre de sites de $\mathcal{C}(x)$. Notons que $\mathcal{C}(x)=\{x\}$, toutes fois que le site x n'est incident à aucune arête ouverte.

Si A est un ensemble de sites de $\mathbb{L}^d$, nous écrivons ∂A pour représenter la *frontière* de A, laquelle est constituée de sites de A qui sont voisins proches à des sites situés en dehors de A.

Quant à la notation pour les boîtes, nous convenons de les noter de la façon suivante. Une *boîte* est une partie de $\mathbb{Z}^d$ de la forme $B(a,b)=\{x\in\mathbb{Z}^d : a_i\leq x_i\leq b_i\}$, où a et b sont dans $\mathbb{Z}^d$; et nous écrivons plus simplement

$$B(a,b)=\prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i].$$

Nous pouvons rendre ou voir $B(a,b)$ comme étant un sous-graphe de la grille $\mathbb{L}^d$, qui garde les mêmes arêtes héritées de la grille $\mathbb{L}^d$. Ainsi, nous notons par $B(n)=B_n$ la boîte de longueur $2n$ et centrée à l'origine :

$$B(n)=B_n=[-n,n]^d=\{x\in\mathbb{Z}^d : \|x\|\leq n\}. \tag{1.3.2}$$

Pour tout $x\in\mathbb{Z}^d$, nous écrivons $B(n,x)$ pour la boîte $x+B(n)$ de longuer $2n$ et de centre x.
Enfin, nous noterons la partie entière d'un réel a par $\lfloor a\rfloor$ et au besoin nous fixerons d'autres notations.

Seuil de la Percolation. Quand on s'intéresse à la percolation, une quantité principale et incontournable s'impose à nous, celle-ci étant la *probabilité de percolation*

$\theta(p)$ qui est la probabilité qu'un site donné appartienne à un amas de percolation infini d'arêtes ouvertes. En vertu de l'invariance par translation de la grille et de la mesure de probabilité de l'environnement, nous ne perdons pas de généralité en prenant ce site pour l'origine, et ainsi nous définissons

$$\theta(p) = \mathbb{Q}_p(|\mathcal{C}| = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_p(|\mathcal{C}| = n). \tag{1.3.3}$$

Il est facile de voir que $|\mathcal{C}| = \infty$ si et seulement s'il existe une séquence infinie $x_0, x_1, ...$ de sites disjoints tels que $x_0 = 0, x_i \sim x_{i+1}$ et $[x_i, x_{i+1}]$ est ouverte pour chaque i. Clairement, θ est une fonction non-décroissante de p avec $\theta(0) = 0$ et $\theta(1) = 1$.

Il est fondamental en théorie de percolation de savoir qu'il existe une valeur critique de percolation de p, notée $p_c = p_c(d)$, telle que

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad p < p_c, \\ > 0 & \text{si} \quad p > p_c; \end{cases}$$

$p_c(d)$ es appelée la *probabilité critique* et est définie formellement par

$$p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}. \tag{1.3.4}$$

Le cas unidimensionnel est sans grand intérêt, aussi, sauf mention contraire, nous considérons toujours les cas de $d \geq 2$.

La grille d-dimensionnelle $\mathbb{L}^d$ peut-être considérée comme un sous-graphe de $\mathbb{L}^{d+1}$ par projection sur le sous-espace généré par les d-premières coordonnées ; ainsi, l'origine de $\mathbb{L}^{d+1}$ appartient à une composante connnexe infinie ouverte pour une valeur particulière de p à chaque fois qu'elle appartient à une composante connexe infinie ouverte de la sous-grille $\mathbb{L}^d$. Par conséquent, $\theta(p) = \theta_d(p)$ est non-décroissante en d, faisant que

$$p_c(d+1) \leq p_c(d) \quad \text{pour}\, d \geq 1.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'inégalité stricte est vraie ici, i.e. $p_c(d+1) < p_c(d)$ pour tout $d \geq 1$ (voir [Grim99]).

Nous donnons ci-après quelques théorèmes incontournables en théorie de percolation et qui nous seront utiles dans notre étude. Pour les preuves, voir [Grim99].

Le Théorème suivant nous dit qu'il y a un phénomène critique non-trivial en dimension 2 et plus.

Théorème 1.3.1 *Si $d \geq 2$ alors $0 < p_c(d) < 1$.*

Le fait à retenir de ce Théorème est qu'en dimension 2 et plus, il existe deux phases du processus de percolation. Dans le cas *sous-critique* où $p < p_c(d)$, chaque site est presque sûrement dans une composante connexe finie ouverte, de sorte que toute composante connexe ouverte est p.s. finie. Dans le cas *sur-critique* quand $p > p_c(d)$, chaque site possède une probabilité positive d'être dans une composante connexe infinie ouverte, de sorte qu'il existe p.s. au moins une composante connexe infinie ouverte (voir théorème ci-dessous). Les deux phases sont raisonnablement assez bien comprises, contrairement au processus de percolation de la phase critique où $p = p_c(d)$ (voir [Grim99]).

Théorème 1.3.2 *La probabilité $\psi(p)$ qu'il existe une composante connexe infinie ouverte satisfait*

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & si \quad \theta(p) = 0, \\ 1 & si \quad \theta(p) > 0. \end{cases}$$

Supposons en particulier que $p = p_c(d)$. Il existe une composante connexe infinie ouverte si seulement si $\theta(p_c(d)) > 0$. Il s'avère qu'il n'en existe aucune quand $d = 2$ ou $d \geq 19$, mais ça reste une question ouverte de déterminer s'il existe ou non une telle composante pour une dimension d générale (y compris le cas physique important $d = 3$) ; il est pressenti qu'une telle composante n'existe pas. Théorème 1.3.2 est prouvé par une application de la loi du $0 - 1$, et ceci ne nous dit rien sur le nombre de composantes connexes infinies ouvertes quand $\theta(p) > 0$; toutefois le théorème que nous nous apprêtons à donner nous dit que la composante connexe infinie ouverte est (pour presque tout environnement) unique au cas où celle-ci existe.

Théorème 1.3.3 (**Unicité de la composante connexe infinie ouverte**) *Si p est telle que $\theta(p) > 0$, alors*

$$\mathbb{Q}_p(\textit{il existe exactement une composante connexe infinie ouverte}) = 1$$

Enfin, nous aurons besoin de connaître deux faits géométriques intéressants dont la preuve est donnée à l'annexe. Le premier fait porte sur le cardinal de la composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n, n]^d$, notée par $\mathcal{C}_n$, qui croît proportionnellement au volume de la boîte B_n.

Proposition 1.3.4 *Pour tout $p > p_c$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\mathbb{Q}_p$-p.s. sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, nous avons pour n assez grand :*

$$\#\mathcal{C}_n \geq 2\alpha(2n + 1)^d.$$

Le deuxième fait caractérise la taille des composantes connexes du complémentaire de l'amas de percolation infini ouvert $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{Z}^d$, que nous appelons *trous*, qui interceptent la boîte B_n.

Lemme 1.3.5 *Il existe $\bar{p} < 1$ tel que pour tout $p > \bar{p}$, pour toute réalisation d'une percolation sur les arêtes de paramètre p et pour n assez grand, chaque composante connexe du complémentaire de la composante connexe infinie $\mathcal{C}$ qui intercepte la boîte $[-n, n]^d$ a un volume plus petit que $(\log n)^{5/2}$.*

1.4 RWRE en temps continu

Nous serons amenés dans notre cas à considérer les RWRE en temps continu qui se révèlent être plus aisées d'un point de vue technique à manipuler que dans le cas discret, cependant nos résultats présentés ici sont vrais dans les deux cas.

Les marches alétoires en milieu aléatoire réversible que nous considérons dans notre cas, i.e., les marches aléatoires avec conductances aléatoires sont gouvernées par la matrice de transition

$$P_\omega(x,y) = \frac{\omega_{xy}}{\pi_\omega(x)}, \tag{1.4.1}$$

définie en fonction de la famille $\{\omega_b, b = (x,y), x \sim y, b \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$ (i.i.d.) de conductances aléatoires (non-négatives) vérifiant la condition de symétrie $\omega_{xy} = \omega_{yx}$. La somme $\pi_\omega(x) = \sum_{y\sim x} \omega_{xy}$ définit une mesure invariante et réversible pour la chaîne de Markov à temps discret (continu) correspondante, ceci étant, nous avons

$$\pi_\omega(x)P_\omega(x,y) = \pi_\omega(y)P_\omega(y,x) \quad \text{et} \quad \pi_\omega P_\omega = \pi_\omega$$

Nous utilisons P_ω pour représenter l'opérateur Markovien défini par

$$P_\omega f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} P_\omega(x,y)f(y). \tag{1.4.2}$$

L'opérateur P_ω^l a un noyau $P_\omega^l(x,y)$ qui est défini par

$$P_\omega^l(x,y) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} P_\omega^{l-1}(x,z)P_\omega(z,y).$$

La version en temps continu des RWRE considérées est associée au semi-groupe défini pour chaque environnement ω comme suit.

$$P_t^\omega f(x) = e^{-t(I-P_\omega)} = e^{-t}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i P_\omega^i f}{i!} \tag{1.4.3}$$

Clairement, son noyau est

$$P_t^\omega(x,y) = e^{-t}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i P_\omega^i(x,y)}{i!}.$$

Observons que ceci est effectivement un semi-groupe d'opérateurs, i.e.,

$$\begin{aligned} P_{t+s}^\omega &= P_t^\omega P_s^\omega \\ \lim_{t\to 0} P_t^\omega &= I \end{aligned}$$

où $I = \mathrm{Id}$ est bien entendu l'opérateur identité.
$P_t^\omega(x,\cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}^d$ qui représente la distribution au temps t de la chaîne de Markov continue $(X_t)_{t\geq 0}$ associée à P_ω et de point départ x. Ce processus peut être décrit de la façon suivante. Les déplacements sont ceux d'une chaîne de Markov à temps discret de probabilité de transition P_ω et de point de départ x, mais le temps de saut de la chaîne suit une loi exponentielle de paramètre

1. Ainsi, la probabilité qu'il y ait eu exactement i sauts à l'instant t est $e^{-t}t^i/i!$, et la probabilité d'être en y après exactement i sauts à l'instant t est $e^{-t}t^i P_\omega^i(x,y)/i!$.

Nous utiliserons la notation

$$\pi_\omega(f) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)\pi_\omega(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(f) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x) - \pi_\omega(f)|^2 \pi_\omega(x).$$

Tout au long du manuscrit, nous travaillerons dans l'espace de Hilbert $L^2(\pi_\omega)$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{Z}^d$ de carré intégrable, équipé du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)g(x)\pi_\omega(x),$$

dont la norme associée est

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)|^2\pi_\omega(x)\right)^{1/2}$$

L'opérateur P_ω (par conséquent P_t^ω) est une contraction sur $L^2(\pi_\omega)$ (i.e., $\|P_\omega f\|_2 \le \|f\|_2$). En effet, par l'inégalité de Jensen, $|P_\omega f(x)|^2 \le P_\omega(|f|^2)(x)$ et donc

$$\|P_\omega f\|_2^2 \le \sum_{x,y} P_\omega(x,y)|f(y)|^2\pi_\omega(x) = \sum_y |f(y)|^2\pi_\omega(y) = \|f\|_2^2.$$

En l'occurrence, l'opérateur adjoint P_ω^* est égale à P_ω par rapport à π_ω.

1.5 Outils analytiques

Notre étude nécessite encore de connaître quelques outils analytiques utiles pour obtenir des estimées sur la convergence des chaînes de Markov (continues) en termes d'inégalités fonctionnelles variées. Nous spécifions les notions introduites ci-après au cas où l'espace des sites est $V = \mathbb{Z}^d$, et les chaînes de Markov sont définies par l'opérateur de Markov P_ω (cf. (1.4.2)), lesquelles notions peuvent être toutefois étendues à des situations plus généralisées (voir [PitSa97]–[Sa97]–[Woe00]).

1.5.1 La forme de Dirichlet

La *forme de Dirichlet* est par définition une forme symétrique sur $L^2(\pi_\omega)$. Cette notion jouera un rôle primordial pour établir les preuves des résultats donnés au Chapitre 3.

Définition 1.5.1 *La forme*

$$\mathcal{E}(f,f) = \langle (I - P_\omega)f, f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{x,y} |f(x) - f(y)|^2 P_\omega(x,y)\pi_\omega(x)$$

est appelée la forme de Dirichlet associée à $P_t^\omega = e^{-t(I-P_\omega)}$.

La notion de forme de Dirichlet nous amène à présenter un outil important connu sous le nom du *Théorème de min-max de Courant-Fischer*. Soit de façon générale une forme quadratique (Hermitienne dans une situation plus générale) sur $L^2(\pi_\omega)$. Pour un espace vectoriel quelconque $W \subset L^2(\pi_\omega)$, posons

$$M(W) = \max_{f\in W, f\not\equiv 0} \left\{ \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2} \right\}, \quad m(W) = \min_{f\in W, f\not\equiv 0} \left\{ \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_2^2} \right\}.$$

Rappelons de l'algèbre linéaire qu'il existe une matrice positive symétrique unique A telle que $\mathcal{E}(f,f) = \langle Af, f\rangle$, et que, par définition, les valeurs propres de $\mathcal{E}$ et A sont identiques. En outre, ces dernières sont réelles. En l'occurrence, $A = I - P_\omega$.

Théorème 1.5.2 *Soit $\mathcal{E}$ une forme quadratique sur $L^2(\pi_\omega)$, de valeurs propres*

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n.$$

Alors

$$\lambda_k = \min_{\substack{W\subset L^2(\pi_\omega);\\ dim(W)\ge k}} M(W) = \max_{\substack{W\subset L^2(\pi_\omega);\\ dim(W^\perp)\le k-1}} m(W). \tag{1.5.1}$$

Pour une preuve, voir [HorJoh85], page 179-180. Clairement, le minimum de $M(W)$ avec $\dim(W) \ge k$ est obtenu quand W est un espace linéaire engendré par les k premiers vecteurs propres associés aux $\lambda_i, i = 1, ..., k$. De manière similaire, le maximum de $m(W)$ avec $\dim(W^\perp) \le k-1$ est obtenu quand W est engendré par les vecteurs propres associés aux $\lambda_i, i = k, ..., n$.

1.5.2 Inégalités isopérimétriques

Cette partie nous servira à introduire la notion importante des *inégalités isopérimétriques* qui servent d'outils géométriques importants pour étudier la transience et d'autres propriétés probabilistes des chaînes de Markov. Pour plus de considérations sur cet outil, voir [PitSa97]–[Woe00].

Considérons toujours les marches aléatoires avec conductances aléatoires que nous noterons par X, de probabilités de transition données dans (1.4.1), et de même mesure réversible et invariante π_ω. Définissons la mesure $a^\omega(B) = \sum_{b\in B} \omega(b)$. Le triplet $\mathcal{N} = (X, \mathbb{L}^d, \pi_\omega)$, appelé *réseau*, peut être regardé comme un réseau électrique infini où chaque arête b est vue comme un fil électrique avec une résistance $r^\omega(b) = 1/\omega(b)$, connecté à d'autres fils à chaque noeud (sommet). Pour plus de détails sur cette représentation des marches aléatoires avec conductances aléatoires, voir [LyoPer05]–[Woe00].

Soit $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction non-décroissante.

Définition 1.5.3 *Nous disons que $\mathcal{N}$ satisfait une inégalité $\mathfrak{F}$-isopérimétrique $IS_{\mathfrak{F}}$, s'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que*

$$\mathfrak{F}(\pi_\omega(A)) \le \kappa a^\omega(\partial A)$$

pour tout $A \subset \mathbb{Z}^d$ fini.

Si, en particulier, $\mathfrak{F}(t) = t^{1-1/d}$ (avec $1 \leq d \leq \infty$), nous parlons alors d'*inégalité isopérimétrique d-dimensionnelle*, ou simplement IS_d. Quand $d = \infty$, nous entendons par là $1/d = 0$ et $d/(d-1) = 1$, nous parlons d'*inégalité isopérimétrique forte*, habituellement notée par IS.

Dans le cas de la grille $\mathbb{L}^d$, nous avons l'inégalité isopérimétrique classique et aurons besoin de ce fait géométrique pour établir la preuve des résultats présentés au chapitre 3 :

$$\exists \kappa > 0 : |A|^{1-1/d} \leq \kappa |\partial A|. \tag{1.5.2}$$

Les inégalité isopérimétriques nous servent aussi à caractériser le comportement d'une chaîne de Markov sur les amas de percolation, toutefois l'approche classique ne s'applique pas dans ce cas directement. Une manière de pratiquer est de poser, pour $\epsilon > d$

$$I_\epsilon(\mathcal{C}_n) = \inf_{\substack{A \subset \mathcal{C}_n \\ |A| \leq |\mathcal{C}_n|/2}} \frac{|\partial_n A|}{|A|^{1-1/\epsilon}},$$

où $\mathcal{C}_n$ est la composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n, n]^d$ contenant l'origine, et $\partial_n A$ est la frontière de A dans $\mathcal{C}_n$, ceci étant, l'ensemble des sites voisins proches $x \in \mathcal{C}_n$ et $y \in \mathcal{C}_n$ tels que $\omega(x, y) = 1$ et avec $x \in A$ et $y \notin A$ ou $x \notin A$ et $y \in A$. Mathieu et Rémy [MR04] ont alors montré que

Proposition 1.5.4 *Pour $p > p_c$, il existe une constante $\beta = \beta(p, d) > 0$ telle que $\mathbb{Q}_p$-p.s. sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, pour n assez grand, nous avons :*

$$I_{\epsilon(n)}(\mathcal{C}_n) \geq \frac{\beta}{n^{1-d/\epsilon(n)}}, \tag{1.5.3}$$

où $\epsilon(n) = d + 2d\frac{\log \log n}{\log n}$.

Dans le même ordre d'idée, voir [MPia04]–[DelRau09].

Barlow [Ba04] arrive plus tard en reprenant pratiquement la méthode de Mathieu et Rémy [MR04], à prouver les mêmes estimées en se plaçant sur des événements de probabilité exponentiellement petite, et en considérant à la fois, *percolation sur les sites* et sur les arêtes.

Par la même occasion, nous donnons deux autres types d'inégalités utiles à connaître et renvoyons le lecteur aux [Sa97]–[PitSa97] dans lesquelles on trouve une synthèse détaillée réunissant un nombre de résultats utilisant ces inégalités et reliant la croissance du volume des boîtes, isopérimétrie et le noyau de la chaleur. Ces outils généraux qui marchent en fait que pour le cas des conductances uniformément bornées peuvent être adaptés à la percolation, ce que font d'ailleurs Mathieu et Rémy dans [MR04].

Inégalité de Sobolev. Pour une fonction $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$, définissons sa *norme de Sobolev*

$$S_\omega(f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \mathbb{Z}^d} |f(x) - f(y)| \omega_{xy}.$$

Ici, nous donnons un rapport d'équivalence avec IS_d.

Proposition 1.5.5 *La chaîne de Markov (X, P_ω) satisfait IS_d $(1 \leq d \leq \infty)$ si et seulement si*

$$\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \kappa S_\omega(f),$$

pour toute fonction f sur $\mathbb{Z}^d$ à support fini (avec la même constante κ).

Inégalités de Nash. Pour introduire cette notion, replaçons-nous dans une situation un peu plus générale et appelons (K, π) la chaîne de Markov locallement finie (i.e. $K(x, \cdot)$ est à support fini) se mouvant dans l'espace des états V dénombrable (infini), associé au noyau K et de mesure réversible π. Posons

$$Q(x, y) = \pi(x)K(x, y),$$

et considérons π comme une mesure sur V en posant

$$\langle f, g\rangle = \sum_x f(x)g(x)\pi(x).$$

Pour relier le comportement du profil isopérimétrique et du noyau de la chaleur, la notion d'inégalité de Nash et le *profil de Nash* jouent un rôle technique crucial. L'inégalité de Nash est une inégalité fonctionnelle du type

$$\|f\|_2^2 \leq N(\|f\|_1^2/\|f\|_2^2) \left[\|f\|_2^2 - \|Kf\|_2^2\right],$$

vérifiée pour toute fonction f à support fini dans $\mathbb{Z}^d$. Ici, $t \mapsto N(t)$ est une fonction positive non-décroissante. Le profil de Nash peut être défini comme étant la plus petite fonction positive N non-décroissante satisfaisant cette inégalité. Il y a une relation étroite entre le comportement du noyau de la chaleur et le profil de Nash. En plus, les inégalités de Nash sont un outil très efficace pour relier le comportement du noyau de la chaleur à la croissance de volume (des boîtes) ou aux propriétés isopérimétriques.

Le Théorème dit de J. Nash, que nous allons énoncer trouve son origine dans un célèbre papier de Nash de 1958 où il étudie les solutions des équations elliptiques uniformes. La présentation donnée ci-dessous est le fruit d'une suite de modifications dues à un nombre d'auteurs. L'argument de Nash est utilisé par N. Varopoulos dans [Varo85] pour étudier la décroissance du noyau Markovien en temps continu. Sa première utilisation dans le cas discret est dans l'article de Carlen et al [CKS87]. Ceci a été étendu et amélioré dans [CouSa90a]–[CouSa90b]. La version que nous donnons ici est due à Coulhon [Coul95].

Théorème 1.5.6 *Supposons qu'il existe une fonction continue positive non-décroissante N telle que*

$$\|f\|_2^2 \leq N(\|f\|_1^2/\|f\|_2^2) \left[\|f\|_2^2 - \|Kf\|_2^2\right],$$

pour toute fonction f à support fini dans V $(\in l_0(V))$. Alors

$$\phi(n) := \sup_{x \in V} \frac{K^{2n}(x, x)}{\pi(x)} \leq \psi(n),$$

où ψ est une fonction non-croissante dérivable solution de $\psi(t) = -\psi'(t)\, N(1/\psi(t)), \psi(0) = 1/\pi_*, \pi_* = \inf \pi$. Clairement, ψ est aussi définie implicitement par

$$t = \int_{\pi_*}^{1/\psi(t)} \frac{N(s)}{s} ds.$$

En particulier, pour $\alpha \geq 0, -\infty < \beta < \infty$, nous avons

1. *Si $N(t) \preccurlyeq (1+t)^{1/\alpha}$ alors $\phi(n) \preccurlyeq (1+n)^{-\alpha}$.*
2. *Si $N(t) \preccurlyeq [\log_*(t)]^\alpha$ alors $\phi(n) \preccurlyeq \exp\left(-n^{1/(\alpha+1)}\right)$.*
3. *Si $N(t) \preccurlyeq [\log_*(t)]^\alpha [\log_* \log_*(t)]^{-\beta}$ alors $\phi(n) \preccurlyeq \exp\left(-[n(\log_* n)^\beta]^{1/(\alpha+1)}\right)$.*

où $\log_*(t) = \log(2+t)$, et de manière générale, nous écrivons $f \preccurlyeq g$ s'il existe $C > 0$ et $b > a > 0$ tels que $\forall t > 0$,

$$\begin{cases} f(t) \leq C \sup\limits_{at \leq s \leq bt} g(s); \\ \inf\limits_{at \leq s \leq bt} f(s) \leq C g(t). \end{cases}$$

Le Théorème suivant que l'on peut trouver dans [Woe00], relie l'inégalité isopérimétrique à l'inégalité de Nash. Rappelons que $\mathcal{E}(f,f) = \langle (I-K)f, f \rangle$ représente la forme de Dirichlet associé à la chaîne de Markov considérée.

Théorème 1.5.7 *Soit $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $\mathfrak{f}(t) = t/\mathfrak{F}(t)$ soit croissante. Si (K, π) satisfait $IS_{\mathfrak{F}}$ (avec une constante κ) alors l'inégalité de Nash*

$$\|f\|_2^2 \leq \mathfrak{g}(\|f\|_1^2 / \|f\|_2^2) \mathcal{E}(f,f),$$

avec $\mathfrak{g} = 4\kappa^2 \mathfrak{f}(4t)^2$, est vérifiée pour toute $f \in l_0(V)$

Nous concluons cette partie en faisant remarquer que la forme de Dirichlet appliquée a l'indicatrice d'un ensemble donne le poids de son bord. Cela illustre l'idée que l'isopérimètrie et les inégalités de Nash peuvent avoir un lien.

1.6 Résultats

Notre étude porte sur la décroissance du noyau de la chaleur des marches aléatoires avec conductances aléatoires et le travail présenté ci-après fait suite essentiellement aux articles de Fontes et Mathieu [FM06] et de Berger, Biskup, Hoffman et Kozma [BBHK08] dont le but est de comprendre le phénomène de ralentissement des marches aléatoires en milieu aléatoire, caractérisé par une décroissance moins rapide du noyau qu'on dit décroître de manière standard (ou gaussienne, par abus de langage) s'il existe $C = C(\omega)$ tel que

$$P_\omega^n(x,y) \leq \frac{C}{n^{d/2}},$$

autrement, nous disons une décroissance *irrégulière*.

Les marches aléatoires en milieu aléatoire réversible considérées sont définies par les probabilités de transition (1.4.1) pour une famille (ω_{xy}) de conductances aléatoires (non-négatives), vérifiant la condition de symétrie $\omega_{xy} = \omega_{yx}$, non-nulles seulement sur les sites voisins proches dans $\mathbb{Z}^d$ et suivent une loi i.i.d. $\mathbb{Q}$.

De telles marches aléatoires, sous la condition additionnelle d'ellipticité uniforme,

$$\exists \alpha > 0 : \quad \mathbb{Q}(\alpha < \omega_b < 1/\alpha) = 1$$

ont un noyau qui décroît de façon Gaussienne comme il a été prouvé par Delmotte [Del99] :

$$P_\omega^n(x,y) \leq \frac{c_1}{n^{d/2}} \exp\left\{-c_2 \frac{|x-y|^2}{n}\right\}, \tag{1.6.1}$$

où c_1, c_2 sont deux constantes absolues.

Sans cette dernière condition, les choses se compliquent. L'exemple le plus étudié est la marche aléatoire simple sur la composante infinie de la percolation sur les arêtes de $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Ceci correspond à $\omega_{xy} \in \{0,1\}$ i.i.d. avec $\mathbb{Q}(\omega_b = 1) > p_c(d)$, où $p_c(d)$ est la probabilité de percolation critique. Ici, nombre d'auteurs se sont intéressés à ce type de marche aléatoire, notamment De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick [DFGW85, DFGW89], et plus récemment, Mathieu et Rémy [MR04] ont pu montrer que le noyau de telles marches aléatoires regardées sur la composante infinie suivait une décroissance standard, ce qui est une conséquence de la Proposition 1.5.3 dont une preuve via les inégalités de Nash est donnée à l'Annexe D–dont une version plus faible a été obtenue par Heicklen et Hoffman [HH05]– Après quoi Barlow [Ba04] a réussi à prouver la version complète en montrant que le noyau $P_\omega^n(x,y)$ admet des bornes supérieure et inférieure Gaussiennes du type (1.6.1). Cependant, le cas de la percolation sur-critique peut être regardé comme uniformément elliptique parce que les conductances sur l'amas de percolation sont toujours uniformément bornées, ce qui n'est pas le cas dans le modèle que nous considérons. Nous verrons qu'en assouplissant la condition d'ellipticité uniforme, nous perdons la décroissance standard sans toutefois perdre le TCL.

Nous choisisons la famille $\{\omega_b, b = (x,y), x \sim y, b \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$ i.i.d selon une loi de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(R_+^*)^{\mathbb{Z}^d}$ telle que

$$\begin{array}{ll} \omega_b \leq 1 & \text{pour tout } b; \\ \mathbb{Q}(\omega_b \leq a) \sim a^\gamma & \text{quand } a \downarrow 0, \end{array} \tag{1.6.2}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre. Il faut noter l'absence de condition elliptique.

Dans un article récent, Fontes et Mathieu [FM06] ont étudié les marches aléatoires en temps continu sur $\mathbb{Z}^d$ avec des conductances données par

$$\omega_{xy} = \omega(x) \wedge \omega(y)$$

pour des variables aléatoires i.i.d $\omega(x) > 0$ satisfaisant (1.6.2). Ils ont trouvé que le noyau annealed $\int d\mathbb{Q}(\omega) P_0^\omega(X_t = 0)$ exhibe des décroissances opposées, standard et irrégulière, suivant que $\gamma \geq d/2$ ou $\gamma < d/2$. Explicitement, de [FM06], Théorème

4.3, nous avons

$$\int \mathrm{d}\mathbb{Q}(\omega) P_0^\omega(X_t = 0) = t^{-(\gamma \wedge \frac{d}{2}) + o(1)}, \quad t \to \infty. \tag{1.6.3}$$

Par ailleurs, [BBHK08] arrivent à donner, dans le cas quenched, une borne supérieure générale de l'ordre de n^{-2} en considérant des conductances supérieurement bornées obéissant à une condition plus faible, à savoir que la probabilité d'avoir des conductances positives soit supérieure au seuil critique de la percolation.
Pour justifier l'existence d'un réel phénomène d'irrégularité de décroissance du noyau de la chaleur, ils construisent des lois de probabilité de l'environnement $\mathbb{Q}$, avec $\mathbb{Q}(\omega_b > 0) > p_c(d)$, de sorte que le noyau de la marche aléatoire considérée admette une borne inférieure qui soit très proche de n^{-2} pour tout $d \geq 5$. Toutefois, les conductances considérées ont une queue beaucoup plus lourde que polynomiale que l'on considère dans notre cas, en ce sens que la probabilité d'avoir des conductances *faibles* est plus importante.
Les conductances qu'ils utilisent ont une queue au voisinage de zéro de la forme

$$\mathbb{Q}(\omega_{xy} < s) \sim |\log(s)|^{-\theta}$$

avec $\theta > 0$. De façon générale, nous notons $f(a) \sim g(a)$ pour signifier que $f(a)/g(a)$ tends 1 quand a tend vers une certaine limite.

Dans le présent travail, nous montrons sous l'hypothèse (1.6.2) que des conductances à queue polynômiale peuvent servir pour un exemple de décroissance irrégulière du noyau de la chaleur et mieux que ça, un tel modèle exhibe des comportements opposés, *standard* et *irrégulier*, pour les grandes et petites valeurs de l'exposant γ, respectivement. Ainsi, nous présentons ici quatre résultats dont la preuve des deux premiers est donnée au Chapitre 2 et celle des deux autres est dans le Chapitre 3. Le premier dit la chose suivante :

Théorème 1.6.1 *Soit $d \geq 5$. Il existe une constante positive $\delta(\gamma)$ qui ne dépend que de d et γ telle que $\mathbb{Q}$-p.s, il existe $C = C(\omega) < \infty$ telle que pour tout $n \geq 1$*

$$P_\omega^{2n}(0,0) \geq \frac{C}{n^{2+\delta(\gamma)}} \quad \text{et} \quad \delta(\gamma) \xrightarrow[\gamma \to 0]{} 0. \tag{1.6.4}$$

Nous prouvons cette borne inférieure en suivant une approche différente de celle adoptée par Berger, Biskup , Hoffman et Kozma [BBHK08] pour prouver que la probabilité de retour $P_\omega^{2n}(0,0)$ est bornée par une constante aléatoire fois $n^{-d/2}$ en $d = 2, 3$, tandis qu'elle est $o(n^{-2})$ en $d \geq 5$ et $O(n^{-2}\log n)$ en $d = 4$. En fait, ils prouvent que dans une boîte de longeur ℓ_n, il existe une configuration où une conductance *forte* d'ordre 1, séparée des autres sites par des arêtes de conductances d'ordre $1/n$, et (au moins) une des arêtes *faibles* est connectée à l'origine par un chemin fort qui ne quitte pas la boîte. Alors, la probabilité que la marche soit de retour à l'origine à l'instant n est minorée par la probabilité que la marche suive directement ce chemin (ceci coûte une probabilité de l'ordre de $e^{O(\ell_n)}$), ensuite traverse l'arête faible (ce qui coûte $1/n$), passe un temps $n - 2\ell_n$ sur l'arête forte (ce qui coûte seulement une probabilité de l'ordre de $O(1)$), après traverse à nouveau une arête faible (un autre facteur de $1/n$) et alors se dirige vers l'origine pour y être au bon moment (un autre terme $e^{O(\ell_n)}$). Le coût de cette stratégie est $O(1)\, e^{O(\ell_n)} n^{-2}$, aussi si $\ell_n = o(\log n)$ alors nous obtenons l'ordre souhaité n^{-2}.

La méthode pour prouver le Théorème 1.6.1 est en fait simple - nous notons que due à la réversibilité de la marche et avec un bon usage de Cauchy-Schwarz, on n'a pas besoin de conditionner sur le chemin exact de la marche, mais plutôt on peut montrer que la marche a une probabilité relativement grande de rester à l'intérieur d'une boîte relativement petite centrée à l'origine. Notre objectif consistera à montrer que presque pour tout ω, la probabilité que la marche aléatoire, quand elle part de l'origine, est à l'instant n à l'intérieur d'une boîte B_{n^δ} de longueur de l'ordre de n^δ, soit plus grande que c/n (où c est une constante et $\delta = \delta(\gamma) \downarrow 0$). Ainsi, nous aurons $P_\omega^{2n}(0,0)/\pi(0) \geq c/n^{2+\delta d}$ en vertu de l'inégalité suivante qui, pour presque tout environnement, découle de la réversibilité de X, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.6.2) :

$$\begin{aligned} \frac{P_\omega^{2n}(0,0)}{\pi_\omega(0)} &\geq \sum_{y \in B_{n^\delta}} \frac{P_\omega^n(0,y)^2}{\pi_\omega(y)} \\ &\geq \left(\sum_{y \in B_{n^\delta}} P_\omega^n(0,y) \right)^2 \frac{1}{\pi_\omega(B_{n^\delta})} \\ &\geq \frac{P_0^\omega(X_n \in B_{n^\delta})^2}{2d \# B_{n^\delta}}, \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Pour ce faire, nous employons le caractère "doublement aléatoire" de la loi annealed $\mathbb{P}$ et la propriété de Markov. Le caractère i.i.d. de la loi $\mathbb{Q}$ nous permet de faire une construction dynamique de l'environnement et la loi $\mathbb{P}$ nous permet de voir les déplacements de la marche aléatoire comme une réalisation instantanée en ce sens que le *monde* et les règles de ses déplacements se créent au fur et à mesure que le marcheur se déplace et que le reste (du monde indépendant) n'existe pas encore. Nous montrons alors que la marche aléatoire rencontre un *piège*, avec une grande probabilité avant de sortir de B_{n^δ}, qui est par définition une arête d'ordre 1 accessible uniquement par des arêtes d'ordre $1/n$. L'idée ensuite est de faire traverser le marcheur une arête faible (ce qui coûte une probabilité de l'ordre de $1/n$), qui passera un temps d'ordre n sur l'arête forte (ce qui coûte une probabilité de l'ordre de $O(1)$), aussi la probabilité que la marche soit dans la boîte B_{n^δ} est de l'ordre de $1/n$ et le résultat s'ensuit. Par conséquent, nous serons amenés à suivre la marche jusqu'à ce qu'elle trouve une configuration spécifique dans l'environnement.

Le deuxième résultat que nous présentons ci-dessous montre à l'opposé du premier que le décroissance du noyau s'approche plus d'une décroissance standard pour les grandes valeurs de γ.

Théorème 1.6.2 *Soit $d \geq 5$. Il existe une constante positive $\delta = \delta(\gamma)$ dépendant* *seulement de d et γ telle que $\mathbb{Q}$-p.s.*

$$\limsup_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\frac{\log P_\omega^n(0,x)}{\log n}\le -\frac{d}{2}+\delta(\gamma)\quad et\quad \delta(\gamma)\xrightarrow[\gamma\to+\infty]{} 0. \tag{1.6.6}$$

La preuve de ce théorème est basée sur une approche qui lie directement les inégalités isopérimétriques et les estimées du noyau de la chaleur que l'on trouve dans le travail de Morris et Peres [MPer05] ; ce lien reposait auparavant sur des estimées analytiques que l'on appelle les inégalités de Nash.

Le troisième résultat, c'est un équivalent à celui de Fontes et Mathieu (1.6.3), dans le cas quenched. Dans ce cas par contre, nous considérons les mêmes chaînes de Markov mais en temps continu, i.e., la marche attend un temps exponentiel de paramètre 1 avant de sauter dans un site voisin. Nous avons

Théorème 1.6.3 *Pour tout $\gamma > d/2$, nous avons*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log P_0^\omega(X_t=0)}{\log t}=-\frac{d}{2},\qquad \mathbb{Q}-p.s. \tag{1.6.7}$$

Nous suivons une approche différente de celle qu'ont pu adoptée Mathieu et Fontes [FM06] pour prouver le même résultat dans le cas de la loi annealed. Dans la cas quenched, les arguments sont basés sur le changement de temps, les estimées de percolation et l'analyse spectrale. En effet, on opère en premier un changement de temps pour se ramener au fait que la marche aléatoire regardée seulement sur un amas fort (i.e. constitué d'arêtes de conductances d'ordre 1) se comporte de manière standard. Ensuite, nous montrons que le temps de passage de la marche dans un trou est "négligeable" en majorant la trace d'un opérateur Markovien que nous donne la Formule de Feynman-Kac et ce par l'estimation de son trou spectral.

Quant au dernier résultat, c'est en fait une conséquence prévisible du troisième résultat, qui nous dit que ceci reste tout aussi vrai en temps discret.

Corollary 1.6.4 *Pour tout $\gamma > d/2$, nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log P_\omega^{2n}(0,0)}{\log n}=-\frac{d}{2},\qquad \mathbb{Q}-p.s. \tag{1.6.8}$$

1.7 Quelques phénomènes étudiés des RWRE

Théorème central limite. Les dernières avancées sur ce sujet restent le travail de Barlow et Deuschel [BaDeu04]. Ils étudient et obtiennent des bornes sur le noyau de la chaleur des marches aléatoires avec des conductances aléatoires $\mu_e \in [0,+\infty)$ à temps continu. Ils prouvent aussi un principe d'invariance pour les marches aléatoires considérées, lequel reste vrai même quand $\mathbb{E}\mu_e = \infty$. Nous devons citer aussi l'article de Kipnis et Varadhan [KipVar86], les travaux de Biskup et Prescott [BP07], de Mathieu et Piatnitski [MPia04] et de Mathieu [M08]. Dans la dernière référence Mathieu arrive à prouver la version quenched du principe d'invariance, qui a été prouvé auparavant dans le cas annealed (i.e., sous la loi $\mathbb{P} = \mathbb{Q} \otimes P_0^\omega$) par De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick [DFGW89], pour les marches aléatoires avec conductances aléatoires majorées et sans conditions sur la borne inférieure, qui n'admettent pas généralement une décroissance Gaussienne du noyau de la chaleur comme nos résultats le prouvent.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus Markovien généré par $P_\omega - I$. $\mathcal{C}$ représente toujours l'amas de percolation ouvert infini. Le Théorème 1.3. de [M08] dit que :

Théorème 1.7.1 (Principe d'invariance quenched.) *Considérer une marche aléatoire avec conductances aléatoires i.i.d. sur-critique. Supposons que $0 \in \mathcal{C}$. Sous P_0^ω, le processus $(X^\epsilon(t) = \epsilon X(\frac{t}{\epsilon^2}), t \in \mathbb{R}_+)$ converge en loi, quand ϵ tend vers 0, vers un mouvement Brownien non-dégénéré de matrice de covariance $\sigma^2 Id$ où σ^2 est positive et ne dépend pas de ω.*

Grandes déviations. L'objet d'étude des grandes déviations porte sur la quantification des probabilités asymptotiques des évènements dits *rares*, comme par exemple la quantité $P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i| \geq \delta)$, pour une suite de variables aléatoires i.i.d. et une constante positive quelconque $\delta > 0$ (la mesure de probabilité P peut être en l'occurrence $\mathbb{P}$ ou P_ω).
Le *principe de grandes déviations* caractérise le comportement asymptotique, quand $\epsilon \to 0$, d'une famille de mesures de probabilité $\{\mu_\epsilon\}$ sur l'espace $\mathcal{X}$ (métrique, complet et séparable) en termes de *fonction de taux* : Une fonction de taux est une application semicontinue inférieure $I : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ telle que pour tout $\alpha \in [0, \infty)$, l'ensemble (niveau) $\Psi_I(\alpha) = \{x : I(x) \leq \alpha\}$ est un fermé de $\mathcal{X}$. Une bonne fonction de taux est celle pour laquelle tous les ensembles (niveau) $\Psi_I(\alpha)$ sont des ensembles compacts de $\mathcal{X}$.
On dit que $\{\mu_\epsilon\}$ satisfait le principe de grandes déviations pour une fonction de taux I si pour tout ensemble Γ de la tribu des boréliens de $\mathcal{X}$,

$$-\inf_{x\in\Gamma^\circ} I(x) \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} I(x).$$

où pour tout ensemble Γ, Γ° représente l'intérieur Γ, $\bar{\Gamma}$ l'adérence de Γ, Γ^c le complémentaire de Γ.

En 1994, Greven et Den Hollander [GreHol94] démontrent, pour les marches aléatoires en milieu aléatoire, un principe de grandes déviations sous la loi quenched. Il est intéressant de noter que la fonction de taux obtenue est déterministe, i.e. ne dépend pas de la réalisation de l'environnement.

Grâce à une approche différente, Comets, Gantert et Zeitouni [CGZ00] obtiennent, en plus, un principe de grandes déviations sous la loi annealed et établissent l'existence d'un principe de grandes déviations fonctionnel. Ils prouvent notamment que les fonctions de taux sous les lois quenched et annealed diffèrent dès lors que la fonction de taux sous la loi annealed est non-nulle. Observons que Dembo, Gantert, Peres et Zeitouni [DGPZ02] montrent que ce résultat n'est plus vrai dans le cas des marches aléatoires sur un arbre aléatoire.

Voici quelques références pour une littérature plus détaillée concernant les grandes déviations, [DPZ96], [Duv06], [GanZei98], [GanZei99] et [PisPo99]. Pour une dimension quelconque, il faudrait voir les travaux de Varadhan et son étudiant Yilmaz, notamment [Yil07]–[Yil08]–[Yil08]–[Yil09] et aussi le dernier en date, l'article de Yilmaz avec Zeitouni [YilZeit09].

RWIIC. (Random Walk on the Incipient Infinite Cluster.) Ce phénomène a donc pour objet d'étude les marches aléatoires sur les amas infinis de percolation critique, c'est-à-dire un amas de percolation critique conditionné à être infini, qu'on note IIC. On est amené à faire cette supposition pour éviter les cas de figure associés à la marche aléatoire sur des composantes finies, encore qu'il est pressenti que les amas de percolation critique soient finis en toute dimension pour $\mathbb{Z}^d$ (pour les cas $d = 2$ ou $d \geq 19$, cela est déjà établi, cf. [Grim99]), et sont effectivement finis pour les graphes orientés [BezGrim0]. Les IIC ont été construits jusqu'à présent seulement quand $d = 2$ [Kes86b], quand $d > 6$ (dans le cas qu'on dira "percolation élargie" (spread-out)) [vaHJá04], et quand $d > 4$ pour la percolation orientée sur $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ (aussi dans le cas de la percolation élargie) [vaHHSla02]. Voir [Sla06] pour un résumé des résultats en dimensions supérieures. Aussi, il n'est pas difficile de construire les IIC sur des arbres [BaKu06]–[Kes86c].

Il a été prouvé que les marches aléatoires sur les IIC sur $\mathbb{Z}^2$ [Kes86c] sont sous-diffusives et sur un arbre [BaKu06]–[Kes86c]. (Voir aussi [Croy08a]–[Croy08b].) Récemment, on est arrivé dans [BaJáKuSl08] à différentes estimées sur les RWIIC dans le cas de la percolation orientée élargie sur $Z^d \times \mathbb{Z}_+$ en dimension $d > 6$. Ces estimées montrent un comportement sous-diffusif et donnent aussi la *dimension spectrale* des IIC, qui est égale à 4/3. Par définition, la dimension spectrale d'un graphe G est la limite

$$D_s(G) = -2 \lim_{n\to\infty} \frac{\log P_\omega^{2n}(0,0)}{\log n}$$

Ainsi, ces estimées prouvent la conjecture de Alexander-Orbach [AlOr82]. Pour les marches aléatoires sur les amas de percolation ordinaire (non-ordonnée) pour $d < 6$, cette conjecture est généralement pressentie fausse [Hug96], Section 7.4.

Nous citons aussi en l'occurrence les travaux de Barlow, Járai, Kumagai et Misumi [BaKu06]–[KuMi08]–[BaJáKuSl08], où les auteurs étudient ces modèles de marches aléatoires sur les amas infinis de percolation critique en utilisant des techniques de calcul basées principalement sur l'article de Barlow, Coulhon et Kumagai [BaCoKu05] dans lequel les poids des arêtes du graphe considéré sont supposés uniformément minorés, ce qui fait défaut en fait, soit dit en passant, si l'on veut appliquer les mêmes techniques à notre modèle de conductances polynômiales. Et ils arrivent à différentes estimées sur le comportement des marches considérées, notamment sur les temps de sortie et les probabilités de transition. Particulièrement, dans le cadre de l'étude du phénomène de ralentissement des RWRE, Kumagai et Misumi [KuMi08] établissent des estimées générales sur le comportement des marches aléatoires récurrentes simples (avec $D_s(G) < 2$) sur des graphes arbitraires en supposant des bornes adéquates sur le volume et la résistance effective du graphe, ce qui généralise les résultats dans [BaJáKuSl08], et en particulier, donne la dimension spectrale du graphe aléatoire et en même temps pour presque tout environnement aléatoire ω, des bornes sur les probabilités de retour du type

$$\frac{(\log n)^{-\beta}}{v(\mathcal{I}(n))} \leq \frac{P_\omega^{2n}(x,x)}{\pi_\omega(x)} \leq \frac{(\log n)^{\beta}}{v(\mathcal{I}(n))}, \quad n \geq N_x(\omega),$$

où $\beta < \infty$ est une constante positive, $N_x(\omega) < \infty$, v est une fonction strictement croissante qui sert à contrôler le volume des boîtes, et $\mathcal{I}(\cdot)$ est la fonction inverse de $(v \cdot r)(\cdot)$, où $r(\cdot)$ est aussi une fonction strictement croissante qui sert à contrôler la dite résistance effective. Ils donnent aussi, à défaut de faire mieux pour les RWIIC de petite dimension, une application des résultats obtenus pour les marches aléatoires sur un amas de percolation sur $\mathbb{Z}$ non-limités au voisins proches et admettant des sauts longs.

Direction asymptotique et Loi des grands nombres. Quand on s'intéresse à ces deux notions, on veut mesurer l'évènement suivant :

$$A_\pm = \{\lim_{n\to\infty} X_n \cdot l = \pm\infty\}, \quad l \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\},$$

ou connaître la limite des quantités X_n/n et $X_n/|X_n|$.

Pour avoir une idée des résultats obtenus dans ce domaine, nous commencerons par l'article de Kalikow [Kal81] dans lequel il prouve en considérant les marches aléatoires en milieu i.i.d. que l'évènement que X_n reste de signe constant pour les grandes valeurs de n a une probabilité soit 0 soit 1. Comme il a été montré dans [SzZer99], Lemme 1.1., ceci implique que la loi du $0-1$

$$\mathbb{P}[A_{-l} \cup A_{+l}] \in \{0,1\},$$

est vraie. Kalikow pose également la question " L'évènement A_l vérifie-t-il $\mathbb{P}(A_l) = 0$ ou 1 ? " qui reste toujours sans réponse, excepté pour la dimension 2, [MZerM01]. Sur ce sujet de la loi du $0-1$, nous citons le travail de Berger [Berg08]. L'étude des RWRE qui a stagné un moment rebondit en 1999 avec l'introduction par Sznitman et Zerner [SzZer99] de la structure de renouvellement. Cet outil, associé à deux résultats de Zerner [MZer02] et le Lemme 3.2.5, p. 265 de [Zeit04], permet d'obtenir un théorème proche d'une loi des grands nombres.

Théorème 1.7.2 *(Sznitman-Zerner-1999.) On a $\mathbb{P}$-p.s.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = v,$$

avec v une variable aléatoire dont le support comporte au plus deux éléments.

Ce théorème se transforme en " vraie " loi des grands nombres dans le cas de la dimension $d = 2$ grâce à la loi du $0-1$ de Merkl et Zerner, [MZerM01]. Dans une série d'articles, [Sz01], [Sz02] et [Sz03], Sznitman étudie la classe des marches balistiques (c'est-à-dire satisfaisant une loi des grands nombres avec vitesse non nulle). Il introduit des conditions suffisantes toujours plus fines $((T), (T'))$ sans toutefois parvenir à une caractérisation de cette classe.

Chapitre 2

Comportements opposés du noyau de la chaleur

Nous étudions des modèles de marches aléatoires en milieu aléatoire, simples, symétriques et à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, gouvernées par une famille de conductances aléatoires i.i.d. $\omega_{xy} \in [0, 1]$, avec une queue polynômiale au voisinage de 0 d'un exposant $\gamma > 0$. Nous prouvons en premier pour tout $d \geq 5$ que la probabilité de retour suit une décroissance irrégulière qui s'approche (à un terme sous-polymômial près) de n^{-2} fois une constante et ce quand on pousse l'exposant γ vers zéro. À l'opposé, nous prouvons aussi que le noyau de la chaleur est aussi proche que l'on veut, dans un sens logarithmique, de la borne standard $n^{-d/2}$ pour les grandes valeurs du paramètre γ.

Le présent chapitre dont un intitulé plus explicite serait les *Estimées du noyau de la chaleur des marches aléatoires avec conductances aléatoires à queue lourde*, reprend le travail de l'article [Bo09a], publié dans la revue *Stochastic Processes and their Applications.*

2.1 Introduction et résultats.

Le but principal de ce travail est la dérivation de bornes du noyau de la chaleur pour des marches aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec conductances aléatoires à queue polynômiale au voisinage de zéro d'un exposant $\gamma > 0$, sur $\mathbb{Z}^d, d > 4$. Nous montrons que le noyau de transition exhibe des comportements opposés, irrégulier et standard, pour les petites et les grandes valeurs de γ.

Les marches aléatoires en milieu aléatoire réversible sont gouvernées par la matrice de transition

$$P_\omega(x, y) = \frac{\omega_{xy}}{\pi_\omega(x)}. \tag{2.1.1}$$

où (ω_{xy}) est une famille de conductances aléatoires (non-negatives) vérifiant la condition de symétrie $\omega_{xy} = \omega_{yx}$. La somme $\pi_\omega(x) = \sum_y \omega_{xy}$ définit une mesure invariante et réversible pour la chaîne de Markov correspondante à temps discret. Dans la plupart des cas, ω_{xy} sont non nulles seulement pour les sites voisins proches dans $\mathbb{Z}^d$ et suivent une loi de probabilité $\mathbb{Q}$ invariante par translation, ergodique ou même i.i.d.

Une classe générale de résultats sont valables pour de telles marches aléatoires sous l'hypothèse additionnelle d'ellipticité uniforme,

$$\exists \alpha > 0 : \quad \mathbb{Q}(\alpha < \omega_b < 1/\alpha) = 1$$

et la limitation de la distribution des sauts,

$$\exists R < \infty : |x| \geq R \Rightarrow P_\omega(0,x) = 0, \quad \mathbb{Q} - p.s.$$

On a alors la décroissance gaussienne du noyau de la chaleur, comme il a été prouvé par Delmotte [Del99] :

$$P_\omega^n(x,y) \leq \frac{c_1}{n^{d/2}} \exp\left\{-c_2 \frac{|x-y|^2}{n}\right\}, \tag{2.1.2}$$

où c_1, c_2 sont des constantes absolues.

Une fois la condition d'ellipticité uniforme relaxée, les choses se compliquent. L'exemple intensément édutié est la marche aléatoire simple sur la composante infinie de la percolation sur-critique des arêtes de $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Ceci correspond à $\omega_{xy} \in \{0,1\}$ i.i.d. avec $\mathbb{Q}(\omega_b = 1) > p_c(d)$ où $p_c(d)$ est la probabilité critique (voir Introduction ou [Grim99]). Ici, un principe d'invariance annealed a été obtenu par De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick [DFGW85, DFGW89] à la fin des années 1980s. Plus récemment, Mathieu et Remy [MR04] ont prouvé que les probabilités de retour (i.e., $x = y$) admettent la borne supérieure (2.1.2)— Heicklen et Hoffman [HH05] ont obtenu une version plus faible —et, juste après, Barlow [Ba04] a prouvé la version complète en montrant que $P_\omega^n(x,y)$ admet des bornes supérieure et inférieure de la forme (2.1.2). (Ces deux résultats sont valables pour n excédant un temps aléatoire défini en fonction de l'environnement et des positions respectives de x et y.) Les bornes supérieures du noyau ont été alors utilisées dans les preuves du principe d'invariance par Sidoravicius et Sznitman [SSz04] pour $d \geq 4$, et pour tout $d \geq 2$ par Berger et Biskup [BB07], et Mathieu et Piatnitski [MPia04].

Nous considérons dans notre cas une famille de chaînes de Markov symétriques, irréductibles et limitées aux voisins proches dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 5$, gouvernée par une collection de conductances aléatoires bornées, $\omega_{xy} \in [0,1]$, i.i.d. et vérifiant la condition de symétrie $\omega_{xy} = \omega_{yx}$. Celles-là sont construites comme suit.
Soit Ω l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_+$ telles que $\omega_{xy} > 0$ ssi $x \sim y$, et $\omega_{xy} = \omega_{yx}$ Nous appelons les éléments de Ω environnements.
Nous choisissons la famille $\{\omega_b, b = (x,y), x \sim y, b \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$ i.i.d suivant une loi $\mathbb{Q}$ sur $(R_+^*)^{\mathbb{Z}^d}$ telle que

$$\begin{array}{ll} \omega_b \leq 1 & \text{pour tout } b; \\ \mathbb{Q}(\omega_b \leq a) \sim a^\gamma & \text{quand } a \downarrow 0, \end{array} \tag{2.1.3}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre. Ainsi, les conductances sont $\mathbb{Q}$-p.s. positives et la condition elliptique est absente. De façon générale, nous notons $f(a) \sim g(a)$ pour signifier que $f(a)/g(a)$ tends 1 quand a tend vers une certaine limite.

Dans un papier récent, Fontes et Mathieu [FM06] ont étudié des marches aléatoires à temps continu sur $\mathbb{Z}^d$ qui sont définies par des générateurs $\mathcal{L}^\omega$ de la forme

$$(\mathcal{L}^\omega f)(x) = \sum_{y\sim x} \omega_{xy}[f(y) - f(x)],$$

avec des conductances données par

$$\omega_{xy} = \omega(x) \wedge \omega(y),$$

pour des variables aléatoires i.i.d. $\omega(x) > 0$ satisfaisant (2.1.3). Pour ces cas-là, on a trouvé que le noyau de la chaleur annealed exhibe une *décroissance irrégulière* pour tout $\gamma < d/2$. Explicitement, de [FM06], Théorème 4.3, nous avons

$$\int \mathrm{d}\mathbb{Q}(\omega) P_0^\omega(X_t = 0) = t^{-(\gamma\wedge\frac{d}{2})+o(1)}, \quad t \to \infty. \tag{2.1.4}$$

En outre, plus récemment, Berger, Biskup, Hoffman et Kozma [BBHK08], ont fourni des bornes supérieures universelles du noyau de la chaleur quenched en considérant les marches aléatoires simples limitées au voisins proches, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, conduites par une collection de conductances aléatoires i.i.d. bornées $\omega_{xy} \in [0, 1]$. La loi des conductances est i.i.d. vérifiant la condition que la probabilité de $\omega_{xy} > 0$ soit supérieure au seuil critique $p_c(d)$ pour la percolation sur les arêtes dans $\mathbb{Z}^d$. Pour des environnements dans lesquels l'origine est connecté à l'infini par des arêtes de conductances positives, ils ont étudié la décroissance de la probabilité de retour $P_\omega^{2n}(0, 0)$ et ont prouvé qu'elle est bornée par une constante aléatoire fois $n^{-d/2}$ en $d = 2, 3$, tandis qu'elle est $o(n^{-2})$ en $d \geq 5$ et $O(n^{-2}\log n)$ en $d = 4$. Plus précisément, de [BBHK08], Théorème 2.1, nous avons pour presque tout $\omega \in \{0 \in \mathcal{C}_\infty\}$ ($\mathcal{C}_\infty$ représente l'ensemble des sites qui ont une trajectoire à l'infini le long d'arêtes avec des conductance positives), et pour tout $n \geq 1$.

$$P_\omega^n(0, 0) \leq C(\omega) \begin{cases} n^{-d/2}, & d = 2, 3, \\ n^{-2}\log n, & d = 4, \\ n^{-2}, & d \geq 5, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

où $C(\omega)$ est une variable aléatoire positive.
D'un autre côté, pour montrer que ces bornes supérieures universelles (cf. (2.1.5)) représentent un réel phénomène, ils ont produit des exemples avec des décroissances irrégulières du noyau de la chaleur approchant $1/n^2$, pour des lois i.i.d. $\mathbb{Q}$ telle que les conductances ont *une queue beaucoup plus lourde que polynômiale* et avec $\mathbb{Q}(\omega_b > 0) > p_c(d)$. Nous citons Théorème 2.2 de [BBHK08] :

Théorème 2.1.1 *(1) Soit $d \geq 5$ et $\kappa > 1/d$. Il existe une loi i.i.d. $\mathbb{Q}$ sur des conductances voisines, bornées avec $\mathbb{Q}(\omega_b > 0) > p_c(d)$ et une variable aléatoire $C = C(\omega)$ telles que pour presque tout $\omega \in \{0 \in \mathcal{C}_\infty\}$,*

$$P_\omega^{2n}(0, 0) \geq C(\omega)\frac{e^{-(\log n)^\kappa}}{n^2}, \qquad n \geq 1. \tag{2.1.6}$$

(2) Soit $d \geq 5$. Pour toute suite croissante $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n \to \infty$, il existe une loi i.i.d. $\mathbb{Q}$ sur des conductances voisines et bornées avec $\mathbb{Q}(\omega_b > 0) > p_c(d)$ et une variable aléatoire p.s. positive $C = C(\omega)$ telles que pour presque tout $\omega \in \{0 \in \mathcal{C}_\infty\}$,

$$P_\omega^n(0,0) \geq \frac{C(\omega)}{\lambda_n n^2} \tag{2.1.7}$$

le long d'une sous-suite qui ne dépend pas de ω.

Les distributions qu'ils ont utilisées dans la partie (1) du Théorème 2.1.1 ont une queue au voisinage de zéro de la forme générale

$$\mathbb{Q}(\omega_{xy} < s) \sim |\log(s)|^{-\theta} \tag{2.1.8}$$

avec $\theta > 0$.

Berger, Biskup, Hoffman et Kozma [BBHK08] ont attiré l'attention sur le fait que la construction des estimées irrégulières du noyau de transition pour des marches aléatoires avec des conductances aléatoires à queue polynômiale dans $\mathbb{Z}^d$, semble requérir un contrôl subtile des bornes inférieures du noyau de la chaleur, ce qui ne peut pas être tiré facilement de la littérature déjà existante. Dans le présent travail, nous donnons une réponse à cette question et montrons que toute distribution avec une décroissance polynômiale d'une puissance donnée au voisinage de zero, peut servir comme exemple, et ce quand on pousse la puissance vers zéro. La borne inférieure obtenue pour la probabilité de retour s'approche (à un terme sous-polynômial près) de celle fournie par [BBHK08] et ce pour tout $d \geq 5$.

Ici est notre premier résultat principal dont la preuve est donnée en section 2.2 :

Théorème 2.1.2 *Soit $d \geq 5$. Il existe une constante positive $\delta(\gamma)$ dépendant seulement de d et γ telle que $\mathbb{Q}$-p.s., il existe $C = C(\omega) < \infty$ et pour tout $n \geq 1$*

$$P_\omega^{2n}(0,0) \geq \frac{C}{n^{2+\delta(\gamma)}} \quad \text{et} \quad \delta(\gamma) \xrightarrow[\gamma \to 0]{} 0. \tag{2.1.9}$$

> **Remarque 2.1.3** La preuve nous dit en fait, avec (2.1.5), que pour $d \geq 5$, nous avons presque sûrement
>
> $$\begin{aligned} -2[1 + d(2d-1)\gamma] \leq \liminf_n \frac{\log P_\omega^{2n}(0,0)}{\log n} \\ \leq \limsup_n \frac{\log P_\omega^{2n}(0,0)}{\log n} \leq -2. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

1. Comme cela a été rappelé par M. Biskup et T.M. Prescott, le principe d'invariance (TCL) (cf Théorème 2.1. dans [BP07] et Théorème 1.3 dans [M08]) implique automatiquement la borne inférieure "usuelle" du noyau de la chaleur sous des conditions plus faibles sur les conductances. En effet, la propriété de Markov et la réversibilité de X entraînent

$$P_0^\omega(X_{2n} = 0) \geq \frac{\pi_\omega(0)}{2d} \sum_{\substack{x \in \mathcal{C}_\infty \\ |x| \leq \sqrt{n}}} P_0^\omega(X_n = x)^2.$$

Cauchy-Schwarz alors donne

$$P_0^\omega(X_{2n}=0) \geq P_0^\omega(|X_n| \leq \sqrt{n})^2 \frac{\pi_\omega(0)/2d}{|\mathcal{C}_\infty \cap [-\sqrt{n},+\sqrt{n}]^d|}.$$

Maintenant, le principe d'invaraince implique que $P_0^\omega(|X_n| \leq \sqrt{n})^2$ possède une limite positive quand $n \to \infty$ et le Théorème Ergodique Spatial montre que $|\mathcal{C}_\infty \cap [-\sqrt{n},+\sqrt{n}]^d|$ croît proportionnellement à $n^{d/2}$. Ainsi nous obtenons

$$P_0^\omega(X_{2n}=0) \geq \frac{C(\omega)}{n^{d/2}}, \quad n \geq 1,$$

avec $C(\omega) > 0$ p.s. sur l'ensemble $\{0 \in \mathcal{C}_\infty\}$. Notons qu'en $d = 2, 3$, ceci complète bien les bornes supérieures universelles dérivées dans [BBHK08]. Dans $d = 4$, la décroissance est au plus $n^{-2}\log n$ et au moins n^{-2}.

Par ailleurs, le résultat de Fontes et Mathieu (2.1.4) (cf. [FM06], Théorème 4.3) nous encourage à croire que le noyau de transition quenched suit une décroissance standard quand $\gamma \geq d/2$, mais la construction semble requérir un contrôl subtile des bornes supérieures du noyau de transition. Dans le second résultat de cette article dont la preuve est donnée à la section 2.3, nous prouvons, pour tout $d \geq 5$, que la décroissance du noyau de la chaleur, est aussi proche que l'on veut, dans un sens logarithmique, de la décroissance standard $n^{-d/2}$, pour les grandes valeurs du paramètre γ. Pour les cas où $d = 2, 3$, nous avons une décroissance standard de la probabilité de retour quenched sous des conditions plus faibles sur les conductances (voir Remarque 2.1.3).

Théorème 2.1.4 *Soit $d \geq 5$. Il existe une constante positive $\delta(\gamma)$ dépendant seulement de d et γ telle que $\mathbb{Q}$-p.s.,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \frac{\log P_\omega^n(0,x)}{\log n} \leq -\frac{d}{2} + \delta(\gamma) \quad et \quad \delta(\gamma) \xrightarrow[\gamma\to+\infty]{} 0. \tag{2.1.11}$$

Dans la suite, nous utilisons P_x^ω pour noter la loi *quenched* de la marche aléatoire $X = (X_n)_{n\geq 0}$ sur $((\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{G})$ avec des probabilités de transition données dans (2.1.1) dans l'environnement ω, où $\mathcal{G}$ est la $\sigma-$algèbre générée par les fonctions cylindres, et soit $\mathbb{P} := \mathbb{Q} \otimes P_0^\omega$ la mesure produit semi-direct dite la loi *annealed*, définie par

$$\mathbb{P}(F \times G) = \int_F \mathbb{Q}(\mathrm{d}\omega) P_0^\omega(G), \quad F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}.$$

où $\mathcal{F}$ représente la $\sigma-$algèbre de Borel sur Ω (qui est la même $\sigma-$algèbre générée par les fonctions cylindres).

2.2 Décroissance irrégulière

Dans cette section, nous donnons la preuve du Théorème 2.1.2.

Nous considérons une famille de conductances aléatoires bornées, voisines $(\omega_b) \in \Omega = [0,1]^{\mathbb{B}^d}$ où b parcourt l'ensemble $\mathbb{B}^d$ des paires non-ordonnées de sites voisins proches dans $\mathbb{Z}^d$. La loi $\mathbb{Q}$ des ω sera i.i.d. satisfaisant les condition données dans (2.1.3).

Nous prouvons cette borne inférieure en suivant une approche différente de celle adoptée par Berger, Biskup , Hoffman et Kozma [BBHK08] pour prouver (2.1.6–2.1.7). En fait, ils prouvent que dans une boîte de longeur ℓ_n il existe une configuration où une conductance *forte* d'ordre 1, est séparée des autres sites par des arêtes de conductances d'ordre $1/n$, et (au moins) une des arêtes *faibles* est connectée à l'origine par un chemin fort qui ne quitte pas la boîte. Alors, la probabilité que la marche soit de retour à l'origine à l'instant n est minorée par la probabilité que la marche suive directement ce chemin (ceci coûte une probabilité de l'ordre de $e^{O(\ell_n)}$), ensuite traverse l'arête faible (ce qui coûte $1/n$), passe un temps $n - 2\ell_n$ sur l'arête forte (ce qui coûte seulement une probabilité de l'ordre de $O(1)$), après traverse à nouveau une arête faible (un autre facteur de $1/n$) et alors se dirige vers l'origine pour y être au bon moment (un autre terme $e^{O(\ell_n)}$). Le coût de cette stratégie est $O(1)\ e^{O(\ell_n)} n^{-2}$, aussi si $\ell_n = o(\log n)$ alors nous obtenons l'ordre souhaité n^{-2}.

La méthode pour prouver le Théorème 2.1.2 est en fait simple - nous notons que due à la réversibilité de la marche et avec un bon usage de Cauchy-Schwarz, on n'a pas besoin de condionner sur le chemin exact de la marche, mais plutôt on peut montrer que la marche a une probabilité relativement grande de rester à l'intérieur d'une boîte relativement petite centrée à l'origine. Notre objectif consistera à montrer que presque pour tout ω, la probabilité que la marche aléatoire, quand elle part de l'origine, est à l'instant n à l'intérieur d'une boîte B_{n^δ} de longueur de l'ordre de n^δ, soit plus grande que c/n (où c est une constante et $\delta = \delta(\gamma) \downarrow 0$). Ainsi, nous aurons $P_\omega^{2n}(0,0)/\pi(0) \geq c/n^{2+\delta d}$ en vertu de l'inégalité suivante qui, pour presque tout environnement, découle de la réversibilité de X, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.1.3) :

$$\begin{aligned}
\frac{P_\omega^{2n}(0,0)}{\pi_\omega(0)} &\geq \sum_{y \in B_{n^\delta}} \frac{P_\omega^n(0,y)^2}{\pi_\omega(y)} \\
&\geq \left(\sum_{y \in B_{n^\delta}} P_\omega^n(0,y) \right)^2 \frac{1}{\pi_\omega(B_{n^\delta})} \\
&\geq \frac{P_0^\omega(X_n \in B_{n^\delta})^2}{2d\# B_{n^\delta}},
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Pour ce faire, nous employons le caractère "doublement aléatoire" de la loi annealed $\mathbb{P}$ et la propriété de Markov. Le caractère i.i.d. de la loi $\mathbb{Q}$ nous permet de faire une construction dynamique de l'environnement et la loi $\mathbb{P}$ nous permet de voir les déplacements de la marche aléatoire comme une réalisation instantanée en ce sens que le *monde* et les règles de ses déplacements se créent au fur et à mesure que le marcheur se déplace et que le reste (du monde indépendant) n'existe pas encore. Nous montrons alors que la marche aléatoire rencontre un *piège*, avec une grande probabilité avant de sortir de B_{n^δ}, qui est par définition une arête d'ordre 1 accessible uniquement par des arêtes d'ordre $1/n$. L'idée ensuite est de faire traverser le marcheur une arête faible (ce qui coûte une probabilité de l'ordre de $1/n$), qui passera un temps d'ordre n sur l'arête forte (ce qui coûte une probabilité de l'ordre de $O(1)$), aussi la probabilité que la marche soit dans la boîte B_{n^δ} est de l'ordre de $1/n$ et le résultat s'ensuit. Par conséquent, nous serons amené à suivre la marche jusqu'à ce qu'elle trouve une configuration spécifique dans l'environnement.

En premier, nous aurons à prouver un lemme. Soit $B_N = [-3N, 3N]^d$ la boîte centrée à l'origine et de rayon $3N$ et définissons sa frontière ∂B_N comme étant l'ensemble des sites de B_N qui ont un voisin en dehors de B_N. Nous avons $\#B_N \leq (7N)^d$. Soit $H_0 = 0$ et définissons H_N, $N \geq 1$, le temps d'atteinte du bord de la boîte B_N, i.e.

$$H_N = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \partial B_N\}.$$

La boîte B_N étant finie pour N fixé, nous avons alors $H_N < \infty$ p.s., $\forall N \geq 1$.

Soient $\hat{e}_i$, $i = 1, \dots, d$, les vecteurs unitaires canoniques dans $\mathbb{Z}^d$, et soit $x \in \mathbb{Z}^d$, avec $x := (x_1, \dots, x_d)$. Définissons $i_0 := \max\{i : |x_i| \geq |x_j|, \forall j \neq i\}$ et soit $\epsilon(x) : \mathbb{Z}^d \to \{-1, 1\}$ l'application telle que

$$\epsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x_{i_0} \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_{i_0} < 0 \end{cases}$$

Maintenant, soient α, ξ des constantes positives telles que $\mathbb{Q}(\omega_b \geq \xi) > 0$. Définissons $\mathcal{A}_N(x)$ l'évènement que la configuration au voisinage de $x, y = x + \epsilon(x)\hat{e}_{i_0}$ et $z = x + 2\epsilon(x)\hat{e}_{i_0}$ soit comme suit :

1. $\frac{1}{2}N^{-\alpha} < \omega_{xy} \leq N^{-\alpha}$.
2. $\omega_{yz} \geq \xi$.
3. toute autre arête émanant de y ou z a $\omega_b \leq N^{-\alpha}$.

L'évènement $\mathcal{A}_N(x)$ ainsi construit implique une collection de $4d - 1$ arêtes, notée par $\mathcal{C}(x)$, i.e.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x) := \{[x, y], [y, z], [y, y^i], [z, z^i], [z, z_0^i]; y = x + \epsilon(x)\hat{e}_{i_0}, z = x + 2\epsilon(x)\hat{e}_{i_0},\\ y^i = y \pm \hat{e}_i, z^i = z \pm \hat{e}_i, \forall i \neq i_0, z_0^i = z + \epsilon(x)\hat{e}_{i_0}\}\end{aligned}$$

Le lemme dit alors que :

Lemme 2.2.1 *La famille* $\{\mathcal{A}_N^k = \mathcal{A}_N(X_{H_k})\}_{k=0}^{N-1}$ *est* $\mathbb{P}$*-independente pour chaque* N*.*

Démonstration. La réalisation de l'évènement $\mathcal{A}_N(X_{H_k})$ signifie que la marche aléatoire X a rencontré un piège $\mathfrak{P}_N$ situé à l'extérieur de la boîte B_k quand elle a touché pour la première fois le bord de la boîte B_k.

Soit q_N la $\mathbb{Q}$-probabilité d'avoir la configuration du piège $\mathfrak{P}_N$. Nous avons $q_N = \mathbb{Q}(\mathcal{A}_N(x)) = \mathbb{P}[\mathcal{A}_N(X_{H_k})]$, $\forall x \in \partial B_k$ et $\forall k \leq N - 1$. En effet, en vertu du caractère i.i.d. des conductances et de la propriété de Markov, quand la marchce aléatoire touche le bord de B_k pour la première fois au niveau d'un site donné x, la probabilité que la collection $\mathcal{C}(x)$ constitue un piège, i.e., satisfait les conditions de l'évènement $\mathcal{A}_N(x)$, dépend seulement de la collection $\mathcal{C}(x)$ qui n'a pas été visitée auparavant. Soient $k_1 < k_2 \leq N-1$ et $x \in \partial B_{k_2}$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x, \mathcal{A}_N^{k_2}\right] &= \mathbb{P}\left[\left\{\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x\right\} \cap \mathcal{A}_N(x)\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x\right] \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N(x)\right] \\
&= q_N \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x\right],
\end{aligned}$$

comme les deux évènements $\left\{\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x\right\}$ et $\mathcal{A}_N(x)$ dépendent respectivement des conductances des arêtes de B_{k_2} et de celles des arêtes de la collection $\mathcal{C}(x)$ qui est située en dehors de la boîte B_{k_2} quand $x \in \partial B_{k_2}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}\mathcal{A}_N^{k_2}\right] &= \sum_{x \in \partial B_{k_2}} \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x, \mathcal{A}_N^{k_2}\right] \\
&= q_N \sum_{x \in \partial B_{k_2}} \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}, X_{H_{k_2}} = x\right] \\
&= q_N \mathbb{P}\left[\mathcal{A}_N^{k_1}\right] = q_N^2.
\end{aligned}$$

Avec quelques adaptations, ce raisonnement reste vrai dans le cas de plus de deux évènements $\mathcal{A}_N^k$. □

Nous arrivons maintenant à la preuve du Théorème 2.1.2.

Preuve du Théorème 2.1.2. Soient $d \geq 5$ et $\gamma > 0$. Posons $\alpha = \frac{1-\epsilon}{(4d-2)\gamma}$, où $\epsilon < 1$ est une constante positive arbitraire (la constantes α est la même qu'on utilise dans la définition de l'évènement $\mathcal{A}_N(x)$). Comme dans l'equation (2.2.1), pour presque tout environnement ω, la réversibilité de X, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.1.3) donnent

$$\frac{P_\omega^{2n}(0,0)}{\pi_\omega(0)} \geq \frac{P_0^\omega(X_n \in B_{n^{1/\alpha}})^2}{2d\# B_{n^{1/\alpha}}}, \tag{2.2.2}$$

En vertu de l'hypothèse (2.1.3) sur les conductances et la définition de l'évènement $\mathcal{A}_N(x)$, la probabilité d'avoir la confuguration du piège $\mathfrak{P}_N$ est plus grande que $cN^{-(1-\epsilon)}$ (où c est une constante que nous utilisons dorénavant comme une constante générique). En effet, quand N est suffisamment grand, nous avons

$$q_N = \mathbb{Q}\left(\frac{1}{2}N^{-\alpha} < \omega_{xy} \leq N^{-\alpha}\right) \mathbb{Q}(\omega_{yz} \geq \xi) \left[\mathbb{Q}(\omega_b \leq N^{-\alpha})\right]^{4d-3} \geq \frac{c}{N^{1-\epsilon}}.$$

Considérons maintenant l'évènement suivant

$$\Lambda_N := \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}_N^k.$$

L'évènement Λ_N ainsi défini peut être interprété comme suit : *au moins, une parmi les N collections disjointes $\mathcal{C}(X_{H_k})$, $k \leq N-1$, constitue un piège $\mathfrak{P}_N$*. Les évènements $\mathcal{A}_N^k$ étant indépendants par le Lemme 2.2.1, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\Lambda_N^c] &\leq \left(1 - cN^{\epsilon-1}\right)^N \\
&\leq \exp\left\{N \log\left(1 - cN^{\epsilon-1}\right)\right\} \\
&\leq \exp\left\{-cN^{\epsilon}\right\}.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

L'inégalité de Chebychev et (2.2.3) donnent alors

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{Q}\left\{\omega : P_0^{\omega}(\Lambda_N^c) \geq 1/2\right\} \leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} \mathbb{P}[\Lambda_N^c] < +\infty. \tag{2.2.4}$$

Il s'ensuit par le lemme de Borel-Cantelli que presque pour tout ω, il existe $N_0 \geq 1$ tel que pour chaque $N \geq N_0$, l'évènement $\mathcal{A}_N(x)$ se réalise à l'intérieur de la boîte B_N avec une probabilité positive (plus grande que $1/2$) sur le chemin de X, pour un certain $x \in B_{N-1}$. Pour presque tout ω, on peut dire que X rencontre avec une probabilité positive un piège $\mathfrak{P}_N$ au niveau d'un site $x \in B_{N-1}$ avant de sortir de B_N.

Supposons que $N \geq N_0$ et soit n tel que $N^{\alpha} \leq n < (N+1)^{\alpha}$. Définissons

$$D_N := \begin{cases} \inf\{k \leq N-1 : \mathcal{A}_N^k \text{ se réalise}\} & \text{si } \Lambda_N \text{ se réalise} \\ +\infty & \text{autrement,} \end{cases}$$

le rang de la preimière parmi les N collections $\mathcal{C}(X_{H_k})$, $k \leq N-1$, qui constituent un piège $\mathfrak{P}_N$. Si $D_N = k$, la variable aléatoire D_N ainsi définie dépend des pas de X jusqu'au temps H_k. Par conséquent, si $D_N = k$, nous avons $X_{H_k} \in B_{N-1}$ et la collection $\mathcal{C}(X_{H_k})$ constitue un piège $\mathfrak{P}_N$. Ainsi, si nous posons $X_{H_k} = x$, l'arête $[x, y]$ (du piège $\mathfrak{P}_N$) aura alors une conductance d'ordre $N^{-\alpha}$. En l'occurrence, la probabilité pour la marche aléatoire, partie de $X_{H_k} = x$, de traverser l'arête $[x, y]$ est par la propriété (1) de la définition de l'évènement $\mathcal{A}_N(x)$ plus-haut, plus grande que

$$\frac{(1/2)N^{-\alpha}}{\pi_{\omega}(x)} \geq \frac{1/2}{2dN^{\alpha}} = \frac{1}{4dN^{\alpha}}. \tag{2.2.5}$$

Ici, nous utilisons le fait que $\pi_{\omega}(x) \leq 2d$ en vertu de (2.1.3). Cela entraîne par la propriété de Markov et par (2.2.5) que

$$\begin{aligned}
&P_0^\omega(X_n \in B_N | D_N \le N-1) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_k} \frac{P_0^\omega(X_n \in B_N, D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \le N-1)} \\
&\quad \ge \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_k} \frac{P_0^\omega(H_N \ge n, D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \le N-1)} \\
&\quad \ge \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_k} \frac{P_0^\omega(D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \le N-1)} P_x^\omega(H_N \ge n) \\
&\quad \ge \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_k} \frac{P_0^\omega(D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \le N-1)} P_y^\omega(H_N \ge n) P_x^\omega(X_1 = y) \\
&\quad \ge \frac{1}{4dN^a} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_k} \frac{P_0^\omega(D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \le N-1)} P_y^\omega(H_N \ge n) \\
&\quad \ge \frac{1}{4dn} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_k} \frac{P_0^\omega(D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \le N-1)} P_y^\omega(H_N \ge n).
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Si le piège $\mathfrak{P}_N$ retient suffisamment longtemps la marche aléatoire X, nous aurons $H_N \ge n$, quand elle part de y (toujours le même $y = x + \epsilon(x)\hat{e}_{i_0}$ de la collection $\mathcal{C}(x)$). Soit

$$E_N := \bigcup_{j=0}^{n-1} \{X_j \textit{ saute à l'extérieur du piège } \mathfrak{P}_N\}$$

et nous disons "X_j *saute à l'extérieur du piège* $\mathfrak{P}_N$ ", quand X_{j+1} est sur un site du bord du piège $\mathfrak{P}_N$, i.e. $X_{j+1} = y \pm \hat{e}_i$, $\forall i \ne i_0$, ou $X_{j+1} = x$ (resp. $X_{j+1} = z \pm \hat{e}_i$, $\forall i \ne i_0$, ou $X_{j+1} = z + \epsilon(z)\hat{e}_{i_0}$) si $X_j = y$ (resp. si $X_j = z$).

Le complémentaire de l'évènement E_N est l'évènement que X ne quitte pas le piège durant ses n premiers sauts, i.e. X saute n fois en partant de y alternativement sur z et y, ce qui coûte, pour chaque saut, d'après la configuration du piège, une probabilité plus grande que

$$\frac{\xi}{\xi + (2d-1)N^{-\alpha}}.$$

Alors nous avons par la propriété de Markov

$$P_y^\omega(H_N \ge n) \ge P_y^\omega(E_N^c) \ge \left(\frac{\xi}{\xi + (2d-1)N^{-\alpha}}\right)^n,$$

et comme par notre choix de $N^\alpha \le n < (N+1)^\alpha$

$$\left(\frac{\xi}{\xi + (2d-1)N^{-\alpha}}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-(2d-1)/\xi},$$

il vient donc pour tout N suffisamment grand que

$$P_y^\omega(H_N \geq n) \geq \frac{e^{-(2d-1)/\xi}}{2}. \tag{2.2.7}$$

Ainsi, remplaçons ceci dans (2.2.6) et nous obtenons

$$\begin{aligned} P_0^\omega(X_n \in B_N | D_N \leq N-1) &\geq \frac{e^{-(2d-1)/\xi}}{8dn} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x \in B_{N-1}} \frac{P_0^\omega(D_N = k, X_{H_k} = x)}{P_0^\omega(D_N \leq N-1)} \\ &\geq \frac{e^{-(2d-1)/\xi}}{8dn}. \end{aligned}$$

Maintenant, selon (2.2.4), nous avons $P_0^\omega(D_N \leq N-1) \geq 1/2$. Alors nous déduisons que

$$P_0^\omega(X_n \in B_N) \geq P_0^\omega(X_n \in B_N | D_N \leq N-1) P_0^\omega(D_N \leq N-1) \geq \frac{e^{-(2d-1)/\xi}}{16dn}.$$

A fortiori, nous avons

$$P_0^\omega(X_n \in B_{n^{1/\alpha}}) \geq P_0^\omega(X_n \in B_N) \geq \frac{e^{-(2d-1)/\xi}}{16dn}.$$

Par conséquent, pour tout $N \geq N_0$, en remplaçant la dernière inégalité dans (2.2.2), nous obtenons

$$P_\omega^{2n}(0,0) \geq \frac{\pi(0) \left(e^{-(2d-1)/\xi}/16d\right)^2 7^{-d} (2d)^{-1}}{n^{2+\delta(\gamma)}}.$$

où $\delta(\gamma) := d(4d-2)\gamma/(1-\epsilon)$. Quand on laisse $\epsilon \longrightarrow 0$, nous aurons (2.1.10). □

2.3 Décroissance standard du noyau de la chaleur

Nous donnons ici la preuve du Théorème 2.1.4.

Nous établissons d'abord quelques définitions et fixons quelques notations en dehors de celles que nous avons vues auparavant.

Considérons une chaîne de Markov sur un espace des états dénombrable V avec des probabilités de transition représentées par $\mathsf{P}(x,y)$ et une mesure invariante notée par π. Définissons $\mathsf{Q}(x,y) = \pi(x)\mathsf{P}(x,y)$ pour chaque $S_1, S_2 \subset V$ et soit

$$\mathsf{Q}(S_1, S_2) = \sum_{x \in S_1} \sum_{y \in S_2} \mathsf{Q}(x,y). \tag{2.3.1}$$

Pour chaque $S \subset V$ avec $\pi(S) \in (0, \infty)$, nous définissons

$$\Phi_S = \frac{\mathsf{Q}(S, S^c)}{\pi(S)} \tag{2.3.2}$$

et l'utilisons pour définir le profile isopérimétrique

$$\Phi(r) = \inf\big\{\Phi_S \colon \pi(S) \le r\big\}. \tag{2.3.3}$$

(Ici $\pi(S)$ est une mesure de S.) Il est facile de vérifier que nous pouvons restreindre l'infimum aux ensembles S qui sont connectés dans le graphes induit sur V par P.

Pour prouver le Théorème 2.1.4, nous combinons principalement deux faits. D'un côté, nous utilisons le Théorème 2 de Morris et Peres [MPer05] que nous résumons ici : supposons que $\mathsf{P}(x,x) \ge \sigma$ pour un certain $\sigma \in (0, 1/2]$ et tout $x \in V$. Soit $\epsilon > 0$ et $x, y \in V$. Alors

$$\mathsf{P}^n(x,y) \le \epsilon\pi(y) \tag{2.3.4}$$

pour tout n tel que

$$n \ge 1 + \frac{(1-\sigma)^2}{\sigma^2} \int_{4[\pi(x)\wedge\pi(y)]}^{4/\epsilon} \frac{4}{u\Phi(u)^2}\,\mathrm{d}u. \tag{2.3.5}$$

Soit $B_{N+1} = [-(N+1), N+1]^d$ et $\mathcal{B}_{N+1}$ étant l'ensemble des arêtes voisines de B_{N+1}, i.e., $\mathcal{B}_{N+1} = \{b = (x,y) : x, y \in B_{N+1}, x \sim y\}$. Appelons $\mathbb{Z}^d_e$ l'ensemble des points pairs de $\mathbb{Z}^d$, i.e., les points $x := (x_1, \dots, x_d)$ tels que $|\sum_{i=1}^d x_i| = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$ $(0 \in \mathbb{N})$ et équipons-le de la structure de graphe définie comme suit : deux points $x, y \in \mathbb{Z}^d_e \subset \mathbb{Z}^d$ sont voisins quand ils sont séparés dans $\mathbb{Z}^d$ par deux sauts, i.e.

$$\sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 2.$$

Nous oppérons la modification suivante sur l'environnement ω en définissons $\tilde{\omega}_b = 1$ sur toute arête $b \notin \mathcal{B}_{N+1}$ et $\tilde{\omega}_b = \omega_b$ autrement. Alors, nous adapterons la machinerie décrite plus haut au cadre suivant

$$V = \mathbb{Z}^d_e, \quad \mathsf{P} = P^2_{\tilde{\omega}} \quad \text{et} \quad \pi = \pi_{\tilde{\omega}}, \tag{2.3.6}$$

avec les ojets dans (2.3.1–2.3.3) notés par $\mathsf{Q}_{\tilde{\omega}}$, $\Phi_S^{(\tilde{\omega})}$ et $\Phi_{\tilde{\omega}}(r)$. Ainsi, la marche aléatoire associée à $P^2_{\tilde{\omega}}$ se meut sur les points pairs.

D'un autre côté, nous aurons besoin de connaître le fait suivant qui donnent des estimées inférieures des conductances de la boîte B_N. Nous avons

Lemme 2.3.1 *Sous l'hyposthèse* (2.1.3),

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\log \inf_{b\in\mathcal{B}_N} \omega_b}{\log N} = -\frac{d}{\gamma}, \qquad \mathbb{Q}-p.s. \tag{2.3.7}$$

Ainsi, pour un $\mu > 0$ arbitraire, nous pouvons écrire $\mathbb{Q}$−p.s., pour tout N suffisamment grand

$$\inf_{b\in\mathcal{B}_{N+1}} \omega_b \ge N^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}. \tag{2.3.8}$$

Preuve du Lemme 2.3.1. Nous reprenons les arguments que Fontes et Mathieu ont utilisés pour prouver le Lemme 3.6 dans [FM06].

Soit $c < d/\gamma$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\inf_b \omega_{b\in\mathcal{B}_N} \geq N^{-c}) &= [\mathbb{Q}(\omega_b \geq N^{-c})]^{d2^dN^d} \\ &\leq (1-c_1N^{c\gamma})^{d2^dN^d} \leq e^{-c_2N^{d-c\gamma}}\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

pour N suffisamment grand et des constantes positives c_1 et c_2. Ainsi le lemme de Borel-Cantelli implique la borne supérieure dans (2.3.9).

Maintenant, soit $c > d/\gamma$. Pour $e^k \leq N \leq e^{k+1}$, nous avons

$$\inf_{b\in\mathcal{B}_N} \omega_b \geq \inf_{b\in\mathcal{B}_{e^k}} \omega_b \wedge \inf_{b\in\mathcal{B}_{e^{k+1}}\setminus\mathcal{B}_{e^k}} \omega_b.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\mathbb{Q}\left(\exists N \in [e^k, e^{k+1}) : \inf_{b\in\mathcal{B}_N} \omega_b \leq N^{-c}\right) \\ &\quad\leq \mathbb{Q}\left(\inf_{b\in\mathcal{B}_{e^k}} \omega_b \leq e^{-ck}\right) + \mathbb{Q}\left(\inf_{b\in\mathcal{B}_{e^{k+1}}\setminus\mathcal{B}_{e^k}} \omega_b \leq e^{-ck}\right) \\ &\quad= (1-(1-c_1e^{-c\gamma k})^{d2^de^{dk}}) + (1-(1-c_1e^{-c\gamma k})^{d2^d(e^{d(k+1)}-e^{dk})}) \\ &\quad\leq c_3e^{-(c\gamma-d)k}\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

et le résultat vient de Borel-Cantelli et la sommabilité des probabilités (à gauche) des inégalités (2.3.9) et (2.3.10) découle de la sommabilité des termes à droite. □

Notre prochaine étape consiste à trouver des bornes appropriées sur des volumes et des surfaces.

Lemme 2.3.2 *Soit $d \geq 2$ et posons $\alpha(N) := N^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}$, pour un $\mu > 0$ arbitraire. Alors, pour presque tout ω, il existe une constante $c > 0$ telle que pour N suffisamment grand et tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}_e^d$ connecté et fini,*

$$\mathsf{Q}_{\tilde{\omega}}(\Lambda, \mathbb{Z}_e^d \setminus \Lambda) \geq c\alpha(N)^2\pi_{\tilde{\omega}}(\Lambda)^{\frac{d-1}{d}}. \tag{2.3.11}$$

La preuve du Lemme 2.3.2 sera une conséquence du fait bien connu suivant sur les inégalités isopérimétriques sur $\mathbb{Z}^d$ (voir [Woe00], Chapter I, § 4). Pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ connecté, soit $\partial\Lambda$ l'ensemble des arêtes entre Λ et $\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda$. Alors, il existe une constante κ telle que

$$|\partial\Lambda| \geq \kappa|\Lambda|^{\frac{d-1}{d}} \tag{2.3.12}$$

pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ connecté et fini. Ceci reste vrai pour $\mathbb{Z}_e^d$.

Preuve du Lemme 2.3.2. Pour un $\mu > 0$ arbitraire, soit $\alpha := \alpha(N) = N^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}$ et soit $N \gg 1$. Pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}_e^d$ connecté et fini, nous avons

$$\mathsf{Q}_{\tilde{\omega}}(\Lambda, \mathbb{Z}_e^d \setminus \Lambda) \geq \frac{\alpha^2}{2d}|\partial\Lambda| \tag{2.3.13}$$

et

$$\pi_{\tilde{\omega}}(\Lambda) \leq 2d|\Lambda|. \tag{2.3.14}$$

Alors, il vient du Lemme 2.3.1 que p.s. $\inf_{b \in \mathcal{B}_N} \omega(b) > \alpha$ et en vertu de (2.3.12), nous avons $|\partial\Lambda| \geq \kappa|\Lambda|^{\frac{d-1}{d}}$, alors (2.3.11) découlera de (2.3.13–2.3.14).

Il reste à prouver (2.3.13–2.3.14). La borne (2.3.14) est une conséquence de $\pi_{\tilde{\omega}}(x) \leq 2d$. Pour (2.3.13), comme P_ω^2 représente deux pas de la marche aléatoire, nous obtenons une borne inférieure de $\mathsf{Q}_\omega(\Lambda, \mathbb{Z}_e^d \setminus \Lambda)$ en prenant un site $x \in \Lambda$ qui a un voisin proche $y \in \mathbb{Z}^d$ qui a un voisin proche $z \in \mathbb{Z}_e^d$ sur la frontière de Λ. Par le Lemme 2.3.1, si x ou $z \in B_{N+1}$, la partie principale est bornée par

$$\pi_{\tilde{\omega}}(x) P_{\tilde{\omega}}^2(x,z) \geq \pi_{\tilde{\omega}}(x) \frac{\tilde{\omega}_{xy}}{\pi_{\tilde{\omega}}(x)} \frac{\tilde{\omega}_{yz}}{\pi_{\tilde{\omega}}(y)} \geq \frac{\alpha^2}{2d}. \tag{2.3.15}$$

Pour le cas où $x, z \notin \mathbb{Z}_e^d \cap B_{N+1}$, clairement le côté gauche de (2.3.15) est borné par $1/(2d) > \alpha^2/(2d)$. Come Λ possède au moins deux éléments, nous pouvons faire ça pour (y,z) parcourant toutes les arêtes dans $\partial\Lambda$. Ainsi en sommant sur (y,z) nous obtenons (2.3.13). $\square$

Maintenant nous avons le matériel nécessaire pour estimer la décroissance de $P_\omega^{2n}(0,0)$.

Preuve du Théorème 2.1.4. Soient $d \geq 5$, $\gamma > 8d$ et choisissons $\mu > 0$ tel que

$$\mu < \frac{1}{8} - \frac{d}{\gamma}.$$

Soient $n = \lfloor N/2 \rfloor$, $N \gg 1$, et considérons la marche aléatoire sur $\tilde{\omega}$.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}_e^d$ un ensemble connecté fini. c représente toujours une constante générique. Observons que (2.3.11) implique

$$\Phi_\Lambda^{(\tilde{\omega})} \geq c\alpha^2 \pi_{\tilde{\omega}}(\Lambda)^{-1/d}. \tag{2.3.16}$$

Alors, nous concluons que

$$\Phi_{\tilde{\omega}}(r) \geq c\alpha^2 r^{-1/d} \tag{2.3.17}$$

L'intégrale principale est donc bornée par

$$\frac{(1-\sigma)^2}{\sigma^2} \int_{4[\pi(0)\wedge\pi(x)]}^{4/\epsilon} \frac{4}{u\Phi_{\tilde{\omega}}(u)^2} \, du \quad \leq \quad c\alpha^{-4}\sigma^{-2}\epsilon^{-2/d} \tag{2.3.18}$$

pour une constante $c > 0$. Choisissons ϵ proportionel à $n^{\frac{4d^2}{\gamma} + 4\mu d - \frac{d}{2}}$. Notant que $\sigma \geq {}^{\alpha^2}\!/_{2d}$, le côté droit est inférieur à n et en posant $\delta(\gamma) = \frac{4d^2}{\gamma}$, nous obtenons

$$P_{\tilde{\omega}}^{2n}(0,x) \leq \frac{c}{n^{\frac{d}{2} - \delta(\gamma) - 4\mu d}}, \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_e^d. \tag{2.3.19}$$

Comme la marche aléatoire ne quittera pas la boîte B_N jusqu'à l'instant $2n$, nous pouvons remplacer $\tilde{\omega}$ par ω dans (2.3.19), et comme $P_\omega^{2n}(0,x) = 0$ pour chaque $x \notin B_N$, alors en laissant $\mu \to 0$, nous obtenons

$$\limsup_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{\log P_\omega^{2n}(0,x)}{\log n} \leq -\frac{d}{2} + \delta(\gamma).$$

Ceci prouve le résultat pour les n pairs ; pour les n impairs, nous devons juste rajouter un pas à la marche. $\square$

Questions. L'étude que nous venons de voir nous amène à poser quelques questions. Le Théorème 2.1.2 nous dit que la décroissance de la probabilité de retour est irrégulière quand l'exposant γ est suffisamment proche de 0. Il serait intéressant de pouvoir connaître la valeur de transition critique à la décroissance irrégulière : serait-elle $d/2$?

Une autre question intéressante, c'est de prouver que la décroissance du noyau de la chaleur est effectivement standard pour un exposant γ plus grand qu'une certaine valeur critique.

Chapitre 3

Décroissance Log-standard des Probabilités de Retour

Dimension Spectrale Standard

Nous étudions des modèles de marches aléatoires en milieu aléatoire symétrique à temps continu et à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, gouvernées par une collection de conductances aléatoires i.i.d. $\omega_{xy} \in [0,1]$ avec une queue polynômiale d'un exposant γ au voisinage de 0. Nous nous intéressons à l'estimation de la décroissance de la probabilité de retour quenched $P_\omega^t(0,0)$, quand t tend vers $+\infty$. Nous montrons que pour tout $\gamma > \frac{d}{2}$, la décroissance standard se révèle être le bon ordre logarithmique de décroissance. Comme conséquence prévisible, le même résultat reste vrai pour le cas discret.

Le présent chapitre reprend les résultas de l'article [Bo09b], un intitulé plus explicite serait *Probabilités de retour de marches aléatoire avec conductances aléatoires à queue polynomiale.*

3.1 Introduction

Nous étudions des modèles de marches aléatoires en milieu aléatoire réversible dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Notre but est de dériver des estimées sur la décroissance des probabilités de transitions dans l'absence de condition d'ellipticité.
Nous parvenons à tirer des bornes de décroissance fortes de la probabilité de retour quenched quand les conductances sont des variables aléatoires i.i.d. choisies suivant une loi polynômiale au voisinage de 0 d'un exposant γ. Nous prouvons alors que la borne standard se révèle être le bon ordre de décroissance logarithmique du noyau de la chaleur, quand $\gamma > d/2$, ce qui fait suite essentiellment aux résulltats récents de Fontes et Mathieu [FM06], Berger, Biskup, Hoffman et Kozma [BBHK08], et au travail du Chapitre 2 (Boukhadra [Bo09a]).

3.1.1 Description du Modèle

Commençons par décrire le modèle plus précisément. Nous considérons une famille de chaînes de Markov irréductibles, symétriques et limitées aux voisins proches dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$, et construites de la façon suivante. Soit Ω l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}_+$ telles que $\omega_{xy} > 0$ ssi $x \sim y$, et $\omega_{xy} = \omega_{yx}$ ($x \sim y$ signfie que x et y sont voisins proches). Nous appelons les éléments de Ω environnements.

Définisson la matrice de transition

$$P_\omega(x, y) = \frac{\omega_{xy}}{\pi_\omega(x)}, \tag{3.1.1}$$

et le générateur de Markov

$$(\mathcal{L}^\omega f)(x) = \sum_{y \sim x} P_\omega(x, y)[f(y) - f(x)]. \tag{3.1.2}$$

$X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ sera le processus correspondant sur l'espace des trajectoires $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{R}_+}$ et nous utilisons la notation P_x^ω pour représenter l'unique mesure de probabilité sous laquelle X est le processus de Markov généré par (3.1.2) et satisfaisant $X_0 = x$ et dont l'espérance associée sera notée par E_x^ω. Ce processus peut être décrit de la façon suivante. Les mouvements sont ceux d'une chaîne de Markov à temps discret avec des probabilités de transition données dans (3.1.1) et de point de départ x, mais les sauts se réalisent après des temps d'attente Poissonniens de paramètre (1). Ainsi, la probabilité qu'il y ait eu exactement i sauts à l'instant t est $e^{-t}t^i/i!$ et la probabilité d'être en y après exactement i sauts à l'instant t est $e^{-t}t^i P_\omega^i(x, y)/i!$.

Comme $\omega_{xy} > 0$ pour toute paire de voisins (x, y), X_t est irréductible sous la “ loi quenched ” P_x^ω pour tout x. La somme $\pi_\omega(x) = \sum_y \omega_{xy}$ définit une mesure réversible et invariante pour la chaîne de Markov correspondante à temps continu (discret).

Le semi-groupe associé à $\mathcal{L}^\omega$ est défini par

$$P_t^\omega f(x) := E_x^\omega[f(X_t)] \tag{3.1.3}$$

Le noyau de la chaleur de telles marches sous l'hypothèse additionnelle d'ellipticité uniforme,

$$\exists \alpha > 0 : \quad \mathbb{Q}(\alpha < \omega_b < 1/\alpha) = 1,$$

suit une décroissance gaussienne, comme il a été prouvé par Delmotte [Del99] :

$$P_\omega^n(x, y) \leq \frac{c_1}{n^{d/2}} \exp\left\{-c_2 \frac{|x - y|^2}{n}\right\}, \tag{3.1.4}$$

où c_1, c_2 sont des constantes absolues.

Une fois la consition d'ellipticité uniforme relaxée, les choses se compliquent. L'exemple intensément édutié est la marche aléatoire simple sur la composante infinie de la percolation sur-critique des arêtes de $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$. Ceci correspond à $\omega_{xy} \in \{0, 1\}$ i.i.d. avec $\mathbb{Q}(\omega_b = 1) > p_c(d)$ où $p_c(d)$ est la probabilité critique (voir Introduction ou [Grim99]). Ici, un principe d'invariance annealed a été obtenu par De Masi, Ferrari, Goldstein et Wick [DFGW85, DFGW89] à la fin des années 1980s. Plus récemment, Mathieu et Rémy [MR04] ont prouvé que les probabilités de retour (i.e., $x = y$) admettent la borne supérieure (3.1.4)— Heicklen et Hoffman [HH05] ont obtenu une version plus faible —et, juste après, Barlow [Ba04] a prouvé la version complète en montrant que $P^n_\omega(x,y)$ admet des bornes supérieure et inférieure de la forme (3.1.4). (Ces deux résultats sont valables pour n excédant un temps aléatoire défini en fonction de l'environnement et des positions respectives de x et y.) Les bornes supérieures du noyau ont été alors utilisées dans les preuves du principe d'invariance par Sidoravicius et Sznitman [SSz04] pour $d \geq 4$, et pour tout $d \geq 2$ par Berger et Biskup [BB07], et Mathieu et Piatnitski [MPia04].

Nous choisissons dans notre cas la famille $\{\omega_b, b = (x,y), x \sim y, b \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d\}$ i.i.d suivant une loi $\mathbb{Q}$ sur $(R^*_+)^{\mathbb{Z}^d}$ telle que

$$\begin{array}{ll} \omega_b \leq 1 & \text{pour tout } b; \\ \mathbb{Q}(\omega_b \leq a) \sim a^\gamma & \text{quand } a \downarrow 0, \end{array} \tag{3.1.5}$$

où $\gamma > 0$ est un parmamètre. Nous notons de façon générale $f(a) \sim g(a)$ pour signifier que $f(a)/g(a)$ tends 1 quand a tend vers une certaine limite.

Notre travail est motivé par l'étude récente de Fontes et Mathieu [FM06] des marches aléatoires à temps continu sur $\mathbb{Z}^d$ qui sont définies par des générateurs $\mathcal{L}^\omega$ de la forme

$$(\mathcal{L}^\omega f)(x) = \sum_{y\sim x} \omega_{xy}[f(y) - f(x)],$$

avec des conductances données par

$$\omega_{xy} = \omega(x) \wedge \omega(y),$$

pour des variables aléatoires i.i.d. $\omega(x) > 0$ satisfaisant (3.1.5). Pour ces cas-là, on a trouvé que le noyau de la chaleur annealed exhibe des comportement opposés *standard et irrégilier*, selon que $\gamma \geq d/2$ ou $\gamma < d/2$. Explicitement, de [FM06], Théorème 4.3, nous avons

$$\int d\mathbb{Q}(\omega) P^\omega_0(X_t = 0) = t^{-(\gamma\wedge\frac{d}{2})+o(1)}, \quad t \to \infty. \tag{3.1.6}$$

En plus, dans un papier plus récent [Bo09a], nous montrons que le noyau de la chaleur quenched exhibe aussi deux comportements opposés, irrégulier et standard, pour les petites et les grandes valeurs de γ. Nous prouvons en premier pour tout $d \geq 5$ que la probabilité de retour décroit de façon irrégulirère qui s'approche (à un terme sous-polynômial près) d'une constante aléatoire fois n^{-2} quand on pousse la puissance γ vers zéro. A l'opposé, nous prouvons que la décroissance du noyau de la chaleur est aussi près que l'on veut, dans un sens logarithmique, de la décroissance standard $n^{-d/2}$ pour les grandes valeurs du paramètre γ, i.e. : il existe une constante positive $\delta = \delta(\gamma)$ dépendant seulement de d et γ telle que $\mathbb{Q}$-p.s.,

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \frac{\log P^n_\omega(0,x)}{\log n} \leq -\frac{d}{2} + \delta(\gamma) \quad \text{et} \quad \delta(\gamma) \xrightarrow[\gamma\to+\infty]{} 0, \tag{3.1.7}$$

Ces résultats font suite à un article de Berger, Biskup, Hoffman et Kozma [BBHK08], dans lequel les auteurs prouvent une borne supérieure universelle (non standard) pour les probabilités de retour des marches aléatoires avec conductances aléatoirs majorées. Dans le même article, ces auteurs founissent des exemples montrant que leur borne est forte et représente un réel phénomène. Cependant, les queues de la distribution au voisinage de zero dans ces exemples sont très lourdes.

3.1.2 Résultats principaux

Soit $\mathbb{B}^d$ l'ensemble des paires voisines non-ordonnées (i.e., arêtes) de $\mathbb{Z}^d$ et soient $(\omega_b)_{b\in\mathbb{B}^d}$ des variables aléatoires i.i.d. avec $(\omega_b) \in \Omega = [0,1]^{\mathbb{B}^d}$. Nous nous référons à ω_b comme étant la *conductance* de l'arête b. La loi $\mathbb{Q}$ des ω sera i.i.d. vérifiant l'hypothèse (3.1.5).

Nous nous intéressons à l'estimation de la décroissance de la probabilité de retour quenched $P_0^\omega(X_t = 0)$, quand t tend vers $+\infty$ pour le processus de Markov associé au générateur défini dans (3.1.2) et nous obtenons, dans le cas quenched, un résultat similaire à (3.1.6). Même si notre résultat est vrai pour tout $d \geq 2$, il n'est toutefois significatif que pour $d \geq 5$.

Le résultat principal de ce papier est le suivant :

Théorème 3.1.1 *Pour tout $\gamma > d/2$, nous avons*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log P_0^\omega(X_t = 0)}{\log t} = -\frac{d}{2}, \qquad \mathbb{Q} - p.s. \tag{3.1.8}$$

Comme conséquence prévisible de ce Théorème est le Corollaire suivant, dont la preuve est donnée dans la partie 3.3.3 et qui nous donne le même résultat pour le cas discret. Pour une marche aléatoire associée aux probabilités de transition données dans (3.1.1) dans un environnement ω avec des conductances satisfaisant l'hypothèse (3.1.5), nous avons

Corollary 3.1.2 *Pour tout $\gamma > d/2$, nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log P_\omega^{2n}(0,0)}{\log n} = -\frac{d}{2}, \qquad \mathbb{Q} - p.s. \tag{3.1.9}$$

Remarque 3.1.3 Le principe d'invariance (TCL) (cf. Théorème 1.3 dans [M08]) implique automatiquement la borne inférieure standard du noyau de la chaleur sous des conditions plus faibles sur les conductances. En effet, supposons que $\omega_{xy} \in [0,1]$ et que la loi des conductances est i.i.d. vérifiant la condition que la probabilité de $\omega_{xy} > 0$ excède le seuil critque de la percolation des arêtes dans $\mathbb{Z}^d$, et soit $\mathcal{C}_\infty$ l'ensemble des sites ayant une trajectoire à l'infini le long d'arêtes de conductances positives. Alors, la propriété de Markov et la réversibilité de X entraînent

$$P_0^\omega(X_t = 0) \geq \frac{\pi_\omega(0)}{2d} \sum_{\substack{x\in\mathcal{C}_\infty \\ |x|\leq\sqrt{t}}} P_0^\omega(X_{t/2} = x)^2.$$

Cauchy-Schwarz donne alors

$$P_0^\omega(X_t = 0) \geq P_0^\omega\left(|X_{t/2}| \leq \sqrt{t}\right)^2 \frac{\pi_\omega(0)/2d}{|\mathcal{C}_\infty \cap [-\sqrt{t}, +\sqrt{t}]^d|}.$$

Maintenant, le principe d'invaraince implique que $P_0^\omega(|X_{t/2}| \leq \sqrt{t})^2$ possède une limite positive quand $t \to \infty$ et le Théorème Ergodique Spatial montre que $|\mathcal{C}_\infty \cap [-\sqrt{t}, +\sqrt{t}]^d|$ croît proportionnellement à $t^{d/2}$. Ainsi, nous obtenons

$$P_0^\omega(X_t = 0) \geq \frac{C(\omega)}{t^{d/2}},$$

avec $C(\omega) > 0$ p.s. et t suffisamment grand. Notons qu'en d = 2, 3, ceci complète bien les bornes supérieures universelles dérivées dans [BBHK08], Théorème 2.1. Par conséquent, pour $d \geq 2$, nous avons

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\log P_0^\omega(X_t = 0)}{\log t} \geq -\frac{d}{2} \qquad \mathbb{Q} - p.s. \tag{3.1.10}$$

et pour les cas où $d = 2, 3, 4$, nous avons déjà la limite (3.1.9) sous des conditions plus faibles sur les conductances. Ainsi, sous l'hypothèse (3.1.5), il reste à étudier les cas où $d \geq 5$ et de prouver que pour $\gamma > d/2$,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log P_0^\omega(X_t = 0)}{\log t} \leq -\frac{d}{2} \qquad \mathbb{Q} - p.s. \tag{3.1.11}$$

3.2 Processus sur l'amas fort

Dans cette section, nous introduisons le processus sur l'amas fort X^ξ.

Choisissons la valeur du paramètre $\xi > 0$ telle que $\mathbb{Q}(\omega_b \geq \xi) > p_c(d)$. La nature i.i.d. de la mesure $\mathbb{Q}$ fait que pour presque tout environnement ω, le graphe de percolation $(\mathbb{Z}^d, \{e \in \mathbb{B}^d; \omega_b \geq \xi\})$ possède une composante infinie unique que nous notons par $\mathcal{C}^\xi = \mathcal{C}^\xi(\omega)$.

Nous nous référons aux composantes connectées du complémentaire de $\mathcal{C}^\xi(\omega)$ dans $\mathbb{Z}^d$ comme étant des *trous*. Par définition, ceux-ci sont des sous-graphes de la grille $\mathbb{Z}^d$. Les sites qui appartiennent à $\mathcal{C}^\xi(\omega)$ sont tous les sommets de toutes ses arêtes. Les autres sites appartiennent aux trous. Notons que ceux-ci peuvent contenir des arêtes telles que $\omega_b \geq \xi$.

Nous donnons en premier une caractérisation importante du volume des trous (pour une preuve, voir l'Annexe B, ou le Lemme 5.2 dans [M08]). $\mathcal{C}$ représente la *composante infinie.*

Lemme 3.2.1 *Il existe $\bar{p} < 1$ tel que pour $p > \bar{p}$, pour toute réalisation de la percolation sur les arêtes de paramètre p et pour n suffisamment grand, toute composante connectée du complémentaire de l'amas de percolation infini $\mathcal{C}$ qui intercepte la boîte $[-n, n]^d$ a un volume plus petit que $(\log n)^{5/2}$.*

Pour le reste de cette étude, choisissons $\xi > 0$ tel que $\mathbb{Q}(\omega_b \geq \xi) > \bar{p}$.

Définissons la mesure condionnelle

$$\mathbb{Q}_0^\xi(\,\cdot\,) = \mathbb{Q}(\,\cdot\,|0 \in \mathcal{C}^\xi).$$

Considérons la fonctionnelle additive suivante de la marche aléatoire :

$$A^\xi(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \in \mathcal{C}^\xi\}} ds,$$

son inverse $(A^\xi)^{-1}(t) = \inf\{s; A^\xi(s) > t\}$ et définissons le processus sur l'amas fort correspondant

$$X^\xi(t) = X((A^\xi)^{-1}(t)).$$

Ainsi le processus X^ξ est obtenu en supprimant dans la trajectoire de X toutes les visites aux trous. Notons que, contrairement à X, le processus X^ξ peut accomplir des sauts longs quand il traverse les trous.

Le comportement du processus stochastique X^ξ est décrit dans la suite

Proposition 3.2.2 *Supposons que l'origine appartient à $\mathcal{C}^\xi$. Alors, sous P_0^ω, le processus stochastique X^ξ est un processus de Markov symétrique sur $\mathcal{C}^\xi$.*

La propriété de Markov, qui n'est pas difficile à prouver, résulte d'un argument général utilisé dans le cas des processus de Markov sur l'amas fort. La réversibilité de X^ξ est une conséquence de la réversibilité de X elle-même comme on pourrait le voir après l'equation (3.2.2).

Le générateur du processus X^ξ a la forme

$$\mathcal{L}_\xi^\omega f(x) = \frac{1}{\eta^\omega(x)} \sum_y \omega^\xi(x,y)(f(y) - f(x)), \tag{3.2.1}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\omega^\xi(x,y)}{\eta^\omega(x)} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} P_x^\omega(X^\xi(t) = y) \qquad (3.2.2) \\ &= P_x^\omega(y \text{ est le point suivant dans } \mathcal{C}^\xi \text{ visité par la marche aléatoire}), \end{aligned}$$

si x et y appartiennent tous les deux à $\mathcal{C}^\xi$ et $\omega^\xi(x,y) = 0$ autrement.

La fonction ω^ξ est symétrique : $\omega^\xi(x,y) = \omega^\xi(y,x)$ comme cela découle de la réversibilité de X et de la formule (3.2.2), mais les sauts ne sont plus limités aux voisins proches i.e. il peut arriver que $\omega^\xi(x,y) \neq 0$ encore que x et y ne soient pas voisins proches. Plus précisément, on a l'image suivante : $\omega^\xi(x,y) = 0$ à moins que x et y soient voisins proches et $\omega(x,y) \geq \xi$, ou il existe un trou, h, tel que x et y ont tous les deux des voisins proches dans h (les deux conditions peuvent être vérifiées par la même paire (x,y)).

Considérons une paire de points voisins x et y, les deux appartiennent à la composante infinie $\mathcal{C}^\xi$ et telle que $\omega(x,y) \geq \xi$, alors

$$\omega^\xi(x,y) \geq \xi. \tag{3.2.3}$$

Cette simple remarque jouera un rôle important. Elle implique, dans un sens, que les parties de la trajectoire de X^ξ faites de sauts limités aux voisins proches sont similaires à ce que fait une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathcal{C}^\xi$. Précisément, nous aurons besoin du fait important suivant que X^ξ admet une borne standard pour le noyau de la chaleur :

Lemme 3.2.3 *Il existe une constante c telle que $\mathbb{Q}_0^\xi$-p.s. pour tout t suffisamment grand, nous avons*

$$P_0^\omega(X^\xi(t) = y) \leq \frac{c}{t^{d/2}}, \quad \forall y \in \mathbb{Z}^d \tag{3.2.4}$$

Pour une preuve, voir l'Annexe D. Dans le cas discret, voir [BBHK08], Lemme 3.2.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.1 et du Corollaire 3.1.2

La borne supérieure (3.1.11) sera discutée dans la partie 3.3.2 et la preuve du Corollaire 3.1.2 est donnée dans la partie 3.3.3. Nous commençons avec quelques lemmes préliminaires.

3.3.1 Préliminaires

En premier, rappelons ce fait standard de la théorie des chaînes de Markov :

Lemme 3.3.1 *La fonction $t \longmapsto P_0^\omega(X_t = 0)$ est décroissante.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de la propriété de semigroupe de la famille d'opérateurs auto-adjoints bornés $(P_t^\omega)_{t\geq 0}$ dans l'espace $L^2(\pi_\omega) = L^2(\mathbb{Z}^d, \pi_\omega)$ pourvu du produit intérieur défini par

$$\langle f, g\rangle_\omega = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)g(x)\pi_\omega(x).$$

□

D'autre part, soit $B_r = [-r, r]^d$ la boîte centrée à l'origine et de rayon r que nous choisissons comme une fonction du temps telle que $t \sim r^2(\log r)^{-b}$, quand $t \to +\infty$ avec $b > 1$, et soit $\mathcal{B}_r$ l'ensemble des arêtes de B_r, i.e., $\mathcal{B}_r = \{b = (x, y) : x, y \in B_r, x \sim y\}$. Nous avons

Lemme 3.3.2 *Sous l'hypothèse (3.1.5),*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\log \inf_{b\in\mathcal{B}_r} \omega_b}{\log r} = -\frac{d}{\gamma}, \qquad \mathbb{Q} - p.s. \tag{3.3.1}$$

Ainsi, pour un $\mu > 0$ arbitraire, nous pouvons écrire $\mathbb{Q}-$p.s. pour r suffisamment grand,

$$\inf_{b\in\mathcal{B}_r} \omega_b \geq r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}. \tag{3.3.2}$$

Pour une preuve voir Chapitre 2, Lemme 2.3.1

Considérons maintenant la formule suivante

$$R_t^\omega f(x) = E_x^\omega\left[f(X_t)e^{-\lambda A^\xi(t)}\right], \qquad t \geq 0, \lambda \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^d \tag{3.3.3}$$

Cet objet va se révéler être la clef dans notre preuve du Théorème 3.1.1. Soit $L_b^2(\pi_\omega)$ l'ensemble des fonctions bornées de $L^2(\pi_\omega)$. Nous avons

Proposition 3.3.3 *$R = \{R_t^\omega, t \geq 0\}$ définit un semigroupe (d'opérateurs symétriques) sur $L_b^2(\pi_\omega)$, avec un générateur*

$$\mathcal{G}^\omega f = \mathcal{L}^\omega f - \lambda \varphi f \tag{3.3.4}$$

où $\varphi = \mathbf{1}_{\{\cdot \in \mathcal{C}^\xi\}}$. On a aussi les identités de perturbations

$$\begin{aligned} R_t^\omega f(x) &= P_t^\omega f(x) - \lambda \int_0^t P_t^\omega (\varphi R_{t-s}^\omega f)(x) ds \\ &= P_t^\omega f(x) - \lambda \int_0^t R_s^\omega (\varphi P_{t-s}^\omega f)(x) ds, \\ t \geq 0, x &\in \mathbb{Z}^d, f \in L_b^2(\pi_\omega). \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Démonstration. La preuve, que nous donnons ici, reprend étroitement les arguments de [Sz98], Théorème 1.1. En effet, nous commençons par la preuve de (3.3.5). Observons que P_x^ω-p.s., pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, la fonction $t \mapsto e^{-\lambda A^\xi(t)}$ est continue, et

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(e^{-\lambda A^\xi(s+h)} - e^{-\lambda A^\xi(s)} \right) = -\lambda \varphi(X_s) e^{-\lambda A^\xi(s)}, \quad \forall s \in [0,t],\ t > 0,$$

à l'exception peut-être d'un ensemble dénombrable $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset (0,t], |I| \subset \mathbb{N}^*$. Alors, pour $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} e^{-\lambda A^\xi(t)} &= 1 - \lambda \int_0^t \varphi(X_s) \exp\left\{ - \int_s^t \lambda \varphi(X_u) du \right\} ds \\ &= 1 - \lambda \int_0^t \varphi(X_s) e^{-\lambda A^\xi(s)} ds. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Multiplions les deux membres de la première egalité de (3.3.6) par $f(X_t)$ et en intégrant nous trouvons :

$$\begin{aligned} R_t^\omega f(x) &= P_t^\omega f(x) - \lambda \int_0^t E_x^\omega \left[\varphi(X_s) \exp\left\{ -\lambda \int_s^t \varphi(X_u) du \right\} f(X_t) \right] ds \\ &= P_t^\omega f(x) - \lambda \int_0^t P_s^\omega (\varphi R_{t-s}^\omega f)(x) ds, \quad \text{(propriété de Markov)}, \end{aligned}$$

ce qui est la première égalité de (3.3.5). De manière analogue, nous trouvons la seconde égalité de (3.3.5) avec l'aide de la seconde ligne de (3.3.6). Ceci complète la preuve de (3.3.5).

Clairement $||R_t^\omega f||_2 \leq c(t,\varphi) ||P_t^\omega f||_2$, alors $R_t^\omega f \in L_b^2(\pi_\omega)$, pour $f \in L_b^2(\pi_\omega)$. De plus, pour $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} R_{s+t}^\omega f(x) &= E_x^\omega \left[e^{-\lambda A^\xi(s)} \exp\left\{ -\lambda \int_s^{s+t} \varphi(X_u) du \right\} f(X_t) \right] \\ &= R_s^\omega (R_t^\omega f)(x), \qquad \text{(propriété de Markov)}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi prouvé que R_t^ω définit un semigroupe sur $L_b^2(\pi_\omega)$. La continuité forte de ce semigroupe découle en laissant t tendre vers 0 dans (3.3.5).

Quant à la preuve de (3.3.4), notons que pour $f \in L_b^2(\pi_\omega)$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_t^\omega(\varphi R_{t-s}^\omega f)(x)ds \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi(x)f(x), \quad \text{uniformément en} \quad x,$$

comme $\varphi(X_t) \mapsto \varphi(x)$, P_x^ω-p.s. En revenant à la première ligne de (3.3.5), ceci prouve que les convergences de $\frac{1}{t}(R_t^\omega - f)$ ou $\frac{1}{t}(P_t^\omega - f)$ quand t tend vers 0, sont équivalente et (3.3.4) est vérifiée. □

Soient $\mathcal{L}_r^\omega$ et $\mathcal{G}_r^\omega$ respectivement les restrictions des opérateurs $\mathcal{L}^\omega$ et $\mathcal{G}^\omega$ (cf. (3.1.2–3.3.4)) à l'ensemble des fonctions sur B_r avec des conditions de Dirichlet en dehors de B_r, que nous notons par $L^2(B_r, \pi_\omega)$ (ceci étant, $\mathcal{L}_r^\omega$ et $\mathcal{G}_r^\omega$ sont respectivement les générateurs du processus X et du semigroupe R, ce qui coincide avec $\mathcal{L}^\omega$ et $\mathcal{G}^\omega$, jusqu'à ce que le processus X quitte B_r pour la première fois, et alors il est tué). Ainsi $-\mathcal{L}_r^\omega$ et $-\mathcal{G}_r^\omega$ sont des opérateurs positives et symétriques et nous avons

$$\mathcal{G}_r^\omega f = \mathcal{L}_r^\omega f - \lambda\varphi f$$

qui est associé au semigroupe défini par

$$(R_t^{\omega,r} f)(0) := E_0^\omega\left[f(X_t)e^{-\lambda A^\xi(t)}; t < \tau_r\right].$$

où τ_r est le temps de sortie du processus X de la boîte B_r.

Soit $\{\lambda_i^\omega(r), i \in [1, \#B_r]\}$ l'ensemble des valeurs propres de $-\mathcal{G}_r^\omega$ ordonnées de manière croissante, et $\{\psi_i^{\omega,r}, i \in [1, \#B_r]\}$ les vecteurs propres normalisés correspondant dans $L^2(B_r, \pi_\omega)$.

3.3.2 Preuve de la borne supérieure

Dans cette partie, nous compléterons la preuve du Théorème 3.1.1 en donnant la preuve de la borne supérieure (3.1.11).

Preuve du Théorème 3.1.1.

Supposons que l'origine appartienne à $\mathcal{C}^\xi$. Par le Lemme 3.3.1, nous avons

$$P_0^\omega(X_t = 0) \le \frac{2}{t}\int_{t/2}^t P_0^\omega(X_s = 0)\mathrm{d}s = \frac{2}{t}E_0^\omega\left[\int_{t/2}^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\mathrm{d}s\right].$$

La fonctionnelle additive A^ξ étant une fonction du temps continue, croissante et nulle en dehors du support de la mesure $\mathrm{d}A^\xi(s)$, aussi opérant un changement de variable en posant $s = (A^\xi)^{-1}(u)$ (i.e. $u = A^\xi(s)$), nous obtenons

$$\begin{aligned} E_0^\omega\left[\int_{t/2}^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\mathrm{d}s\right] &= E_0^\omega\left[\int_{t/2}^t \mathbf{1}_{\{X_s=0\}}\varphi(X_s)\mathrm{d}s\right] \\ &= E_0^\omega\left[\int_{A^\xi(t/2)}^{A^\xi(t)} \mathbf{1}_{\{X^\xi(u)=0\}}\mathrm{d}u\right], \end{aligned}$$

ce qui est borné par

$$E_0^\omega\left[\int_{A^\xi(t/2)}^t \mathbf{1}_{\{X^\xi(u)=0\}}\mathrm{d}u\right],$$

comme $A^\xi(t) \leq t$.

Il vient alors pour $\epsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned} P_0^\omega(X_t=0) \leq & \frac{2}{t}E_0^\omega\left[\int_{A^\xi(t/2)}^t \mathbf{1}_{\{A^\xi(t/2)\geq t^\epsilon\}}\mathbf{1}_{\{X^\xi(u)=0\}}\mathrm{d}u\right] \\ & + \frac{2}{t}E_0^\omega\left[\int_{A^\xi(t/2)}^t \mathbf{1}_{\{A^\xi(t/2)\leq t^\epsilon\}}\mathbf{1}_{\{X^\xi(u)=0\}}\mathrm{d}u\right] \\ \leq & \frac{2}{t}\int_{t^\epsilon}^t P_0^\omega(X^\xi(u)=0)\mathrm{d}u + \frac{2}{t}\int_0^t P_0^\omega(A^\xi(t/2)\leq t^\epsilon)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

et utilisant le Lemme 3.2.3,

$$\begin{aligned} P_0^\omega(X_t=0) &\leq \frac{C}{t}\int_{t^\epsilon}^t u^{-d/2}\mathrm{d}u + \frac{2}{t}P_0^\omega(A^\xi(t/2)\leq t^\epsilon)t \\ &\leq \frac{C}{t^{\epsilon\frac{d}{2}-\epsilon+1}} + 2P_0^\omega(A^\xi(t/2)\leq t^\epsilon) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Il reste à estimer le second terme à droite dans la dernière inégalité, i.e. $P_0^\omega(A^\xi(t/2) \leq t^\epsilon)$ ou plus simplement $P_0^\omega(A^\xi(t) \leq 2^\varepsilon t^\epsilon)$, mais nous pouvons négliger la constante 2^ε dans les calcluls comme on pourra le voir dans (3.3.15).

Pour chaque $\lambda \geq 0$, l'inégalité de Chebychev donne

$$\begin{aligned} P_0^\omega(A^\xi(t)\leq t^\epsilon) &= P_0^\omega(A^\xi(t)\leq t^\epsilon; t<\tau_r) + P_0^\omega(A^\xi(t)\leq t^\epsilon;\tau_r\leq t) \\ &\leq P_0^\omega\left(e^{-\lambda A^\xi(t)}\geq e^{-\lambda t^\epsilon}; t<\tau_r\right) + P_0^\omega(\tau_r\leq t) \\ &\leq e^{\lambda t^\epsilon}E_0^\omega\left[e^{-\lambda A^\xi(t)}; t<\tau_r\right] + P_0^\omega(\tau_r\leq t). \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

De l'inégalité de Carne-Varopoulos (voir Appendice C), il vient que

$$P_0^\omega(\tau_r\leq t) \leq Ctr^{d-1}e^{-\frac{r^2}{4t}} + e^{-ct}, \tag{3.3.9}$$

où C et c sont des constantes numériques, voir l'Annexe C. Avec notre choix de r tel que $t \sim r^2(\log r)^{-b}$ ($b>1$), nous obtenons que $P_0^\omega(\tau_r \leq t)$ décroit plus vite que n'importe quel polynôme quand t tend vers $+\infty$.

Ainsi le Théorème 3.1.1 sera prouvé si nous pouvons montrer pour un choix particulier de $\lambda > 0$ qui peut dépendre de t, que

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\left(e^{\lambda t^\epsilon}E_0^\omega\left[e^{-\lambda A^\xi(t)}; t<\tau_r\right]\right)}{\log t} \leq -\frac{d}{2}. \tag{3.3.10}$$

Ceci sera vrai si $e^{\lambda t^{\epsilon}} E_0^{\omega}\left[e^{-\lambda A^{\xi}(t)}; t < \tau_r\right]$ décroit plus vite que n'importe quel polynôme en t.

Soit $\mathcal{B}_{r+1}$ l'ensemble des arêtes voisines de B_{r+1}, La forme de Dirichlet de $-\mathcal{L}_r^{\omega}$ sur $L^2(B_r, \pi_\omega)$ pourvu du produit scalaire usuel, peut être écrite comme suit

$$\mathcal{E}^{\omega,r}(f,f) = \frac{1}{2}\sum_{b\in\mathcal{B}_{r+1}} (df(b))^2\omega_b,$$

où $df(b) = f(y) - f(x)$ et b dans la somme décrit $\mathcal{B}_{r+1}^{\omega}$. Par le Théorème du mim-max (voir Introduction ou [HorJoh85] et la formule (3.3.4), nous avons

$$\lambda_1^{\omega}(r) = \inf_{f\not\equiv 0} \frac{\mathcal{E}^{\omega,r}(f,f) + \lambda\sum_{x\in\mathcal{C}_r^{\xi}} f^2(x)\pi_\omega(x)}{\pi_\omega(f^2)}. \tag{3.3.11}$$

où $\mathcal{C}_r^{\xi}$ la plus grande composante connexe de $\mathcal{C}^{\xi}\cap B_r$ et l'infimum est sur les fonctions f avec des conditions de Dirichlet au bord de B_r. (Rappelons que $\lambda_1^{\omega}(r)$ est la première valeur propre de $-\mathcal{G}_r^{\omega}$.)

Pour estimer la décroissance du premier terme à droite de (3.3.8), nous aurons besoin aussi d'estimer la première valeur propre $\lambda_1^{\omega}(r)$. Rappelons que μ représente une constante positive arbitraire.

Lemme 3.3.4 *Sous l'hypothèse (3.1.5), pour tous $d \geq 2$ et $\gamma > 0$, nous avons $\mathbb{Q}-$p.s. pour r suffisamment grand,*

$$\lambda_1^{\omega}(r) \geq (8d)^{-1}(\log n)^{-5} r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}, \tag{3.3.12}$$

pour un λ proportionnel à $r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}$.

Démonstration. Pour un $\mu > 0$ arbitraire, soit r suffisamment grand tel que (3.3.2) soit vérifiée. Soit h un trou qui intercepte la boîte B_r, et pour faciler la notation nous utiliserons la même notation pour $h \cap B_r$. Définissons ∂h comme étant le bord extérieur de h, i.e. l'ensemble des sites dans $\mathcal{C}_r^{\xi}$ qui sont voisins à un site dans h. Associons à chaque trou h un site fixé $h^* \in \mathcal{C}_r^{\xi}$ situé au bord extétrieur de h et pour $x \in h$, appelons $\kappa(x, h^*)$ un chemin simple (sans noeud) inclus dans h d'extrémités x et h^*, et soit $|\kappa(x, h^*)|$ la longueur de ce chemin.

Maintenant, soit $f \in L^2(B_r, \pi_\omega)$ et $\mathcal{B}_\omega(h)$ l'ensemble des arêtes voisines de h. Pour chaque $x \in h$, écrivons

$$f(x) = \sum_{b\in\kappa(x,h^*)} df(b) + f(h^*)$$

et, en utilisant Cauchy-Schwarz

$$f^2(x) \leq 2|\kappa(x,h^*)| \sum_{b\in\kappa(x,h^*)} |df(b)|^2 + 2f^2(h^*).$$

Dans chaque chemin $\kappa(x, h^*)$, nous ne voyons chaque arête qu'une seule fois, aussi multiplions la dernière inégalité par $\pi_\omega(x)$ et sommons sur $x \in h$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in h} f^2(x)\pi_\omega(x) \\
&\quad\le 2\sum_{x\in h}|\kappa(x,h^*)|\sum_{b\in\kappa(x,h^*)}|df(b)|^2\pi_\omega(x) + 2\sum_{x\in h} f^2(h^*)\pi_\omega(x) \\
&\quad\le 4d\max_{x\in h}|\kappa(x,h^*)|\max_{b\in\mathcal{B}_\omega(h)}\frac{1}{\omega_b}\#h\sum_{b\in\mathcal{B}_\omega(h)}|df(b)|^2\omega_b \\
&\qquad\qquad + 2\sum_{x\in h} f^2(h^*)\pi_\omega(x),
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

qui, en vertu du Lemme 3.2.1, (3.1.5), (3.3.2) et comme $\pi_\omega(h^*) \ge \xi$, est borné par

$$4dr^{\frac{d}{\gamma}+\mu}(\log r)^5\sum_{b\in\mathcal{B}_\omega(h)}|df(b)|^2\omega_b + \frac{4d}{\hat{\xi}}\#hf^2(h^*)\pi_\omega(h^*),$$

donc,

$$\sum_{x\in h} f^2(x)\pi_\omega(x) \le 4dr^{\frac{d}{\gamma}+\mu}(\log r)^5\sum_{b\in\mathcal{B}_\omega(h)}|df(b)|^2\omega_b + \frac{4d}{\xi}(\log r)^3 f^2(h^*)\pi_\omega(h^*).$$

Soit $\mathcal{C}_r^c(\xi)$ le complémentaire de $\mathcal{C}^\xi$ dans la boîte B_r et sommons sur h pour obtenir

$$\sum_{x\in\mathcal{C}_r^c(\xi)} f^2(x)\pi_\omega(x) \le 8dr^{\frac{d}{\gamma}+\mu}(\log r)^5\mathcal{E}^{\omega,r}(f,f) + \frac{8d^2}{\xi}(\log r)^{5/2}\sum_{x\in\mathcal{C}_r^\xi} f^2(x)\pi_\omega(x),$$

où dans le dernier terme, nous multiplions par $2d$ car nous pouvons associer le même h^* à $2d$ trous différents. Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in B_r} f^2(x)\pi_\omega(x) \\
&\quad\le (1+8d^2(\log r)^{5/2}\xi^{-1})\sum_{x\in\mathcal{C}_r^\xi} f^2(x)\pi_\omega(x) + 8dr^{\frac{d}{\gamma}+\mu}(\log r)^5\mathcal{E}^{\omega,r}(f,f). \\
&\quad\le 8d^2(\log r)^5\xi^{-1}\sum_{x\in\mathcal{C}_r^\xi} f^2(x)\pi_\omega(x) + 8dr^{\frac{d}{\gamma}+\mu}(\log r)^5\mathcal{E}^{\omega,r}(f,f).
\end{aligned}$$

Ainsi, selon (3.3.11) et pour $\lambda = d\xi^{-1}r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}$, nous obtenons

$$\lambda_1^\omega(r) \ge (8d)^{-1}(\log n)^{-5}r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}. \tag{3.3.14}$$

□

Revenons à la preuve de la borne supérieure. Posons

$$\lambda = d\xi^{-1} r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}; \quad m(r) := (8d)^{-1}(\log n)^{-5} r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)}.$$

Pour $f \equiv \mathbf{1}$, observons que

$$\begin{aligned}
(R_t^{\omega,r} f)(0) &:= E_0^\omega \left[e^{-\lambda A^\xi(t)}; t < \tau_r \right] \\
&= \sum_i e^{-\lambda_i^\omega(r)t} \left\langle \mathbf{1}, \psi_i^{\omega,r} \right\rangle \psi_i^{\omega,r}(0),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(R_t^{\omega,r} f)^2(0)\pi_\omega(0) &\leq \sum_{x\in B_r} (R_t^{\omega,r} f)^2(x)\pi_\omega(x) \\
&= \sum_i e^{-2\lambda_i^\omega(r)t} \left\langle \mathbf{1}, \psi_i^{\omega,r} \right\rangle^2 \\
&\leq e^{-2\lambda_1^\omega(r)t} \sum_x \mathbf{1}^2(x)\pi_\omega(x) \\
&\leq 2^{d+2} d r^d e^{-2\lambda_1^\omega(r)t}.
\end{aligned}$$

Alors, pour t suffisamment grand et par (3.3.14), nous avons

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t^\epsilon} E_0^\omega \left[e^{-\lambda A^\xi(t)}; t < \tau_r \right] &\leq (2^{d+2}d)^{1/2} e^{\lambda t^\epsilon} e^{-t\lambda_1^\omega(r)} r^{d/2} \\
&\leq (2^{d+2}d)^{1/2} r^{d/2} \exp\left\{\lambda t^\epsilon - t m(r)\right\} \\
&\leq (2^{d+2}d)^{1/2} r^{d/2} e^{-\frac{t}{2}m(r)}, \qquad (3.3.15)
\end{aligned}$$

comme $\epsilon < 1$.

Par notre choix spécifique de $t \sim r^2(\log r)^{-b}$ $(b > 1)$, nous déduisons

$$\begin{aligned}
e^{\lambda t^\epsilon} E_0^\omega \left[e^{-\lambda A^\xi(t)}; t < \tau_r \right] &\leq (2^{d+2}d)^{1/2} r^{d/2} \exp\left\{ -(16d)^{-1}(\log r)^{-b-5} r^2 r^{-(\frac{d}{\gamma}+\mu)} \right\} \\
&\ll t^{-\frac{d}{2}} \qquad \text{if} \quad \gamma > \frac{d}{2-\mu}, \qquad (3.3.16)
\end{aligned}$$

ce qui entraîne (3.3.10).

En conclusion, comme μ est arbitraire et selon (3.3.9–3.3.10), nous obtenons

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log P_0^\omega(A^\xi(t) \leq t^\epsilon)}{\log t} \leq -\frac{d}{2} \qquad \text{pour} \quad \gamma > \frac{d}{2},$$

et finalement, par (3.3.7)

$$\lim_{\epsilon\to 1} \limsup_{t\to+\infty} \frac{\log P_0^\omega(X_t = 0)}{\log t} \leq -\frac{d}{2} \qquad \text{pour} \quad \gamma > \frac{d}{2},$$

ce qui donne (3.1.11).

Nous concluons que pour tout ξ suffisamment petit, $\mathbb{Q}_0^\xi$-p.s. (3.1.9) est vrai et comme $\mathbb{Q}\left(\cup_{\xi>0}\{0 \in \mathcal{C}^\xi(\omega)\}\right) = 1$, cela reste vrai $\mathbb{Q}$-p.s. $\square$

3.3.3 Preuve du cas discret

Démonstration. De la même manière, la borne inférieure est satisfaite par le Principe d'invariance et le Théorème Ergodique Spatial (voir Remarque 3.1.3).
Pour la borne supérieure, soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre 1. Posons $n = \lfloor t \rfloor$. $P_\omega^{2n}(0,0)$ étant une fonction décroissante de n (cf. Lemme 3.3.1), alors

$$\begin{aligned} P_0^\omega(X_t = 0) &= e^{-t} \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} P_\omega^k(0,0) \\ &\geq e^{-t} \sum_{k=0}^{2n} \frac{t^k}{k!} P_\omega^k(0,0) \\ &\geq P_\omega^{2n}(0,0) \left[e^{-t} \sum_{k=0}^{2n} \frac{t^k}{k!} \right] \\ &= P_\omega^{2n}(0,0) \mathrm{Prob}(N_t \leq 2n). \end{aligned}$$

En vertu de la Loi des grands nombres, nous avons

$$\mathrm{Prob}(N_t \leq 2n) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1.$$

Et le résultat s'ensuit. $\square$

Annexe

Annexe A

Taille de l'Amas dans la Boîte

Nous donnons dans cette section la preuve de la proposition 1.3.4, tirée de [MR04], qui dit que pour tout $p > p_c$, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\mathbb{Q}_p$-p.s. sur l'ensemble $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$, nous avons pour n assez grand :

$$\#\mathcal{C}_n \geq 2\alpha(2n+1)^d. \tag{A.0.1}$$

Choisissons $\rho > 1$. Pour $x \in \mathcal{C}$, soit $D(0,x)$ la longueur minimum d'un chemin ouvert dans $\mathcal{C}$ connectant 0 et x. Supposons qu'il existe un $x \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{C}_n$ tel que $|x| \leq n/\rho$. Sans perte de généralité, nous pouvons et supposerons que $|x| \geq n/(2\rho)$. Ainsi le chemin le plus court dans $\mathcal{C}$ reliant 0 à x doit sortir de la boîte B_n et donc $D(0,x) \geq n \geq \rho|x|$. Nous savons de [AnPis96], Théorème 1.1, qu'il existe un choix de ρ et de β tels que

$$\mathbb{Q}_p(x \in \mathcal{C}, D(0,x) \geq \rho|x|) \leq e^{-\beta|x|},$$

quand $|x| \to \infty$. En particulier,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}_p\left(\exists x \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{C}_n, |x| \leq \frac{n}{\rho}\right) \\
&\quad\leq \mathbb{Q}_p\left(\exists x \in \mathcal{C}, \frac{n}{2\rho} \leq |x| \leq \frac{n}{\rho}, D(0,x) \geq \rho|x|\right) \\
&\quad\leq \sum_{|x| \in [\frac{n}{2\rho}, \frac{n}{\rho}]} e^{-\beta|x|} \\
&\quad\leq (2n+1)^d e^{-\beta n/(2\rho)}.
\end{aligned}$$

Du Lemme de Borel-Cantelli, nous déduisons que, $\mathbb{Q}_p$-p.s., pour n suffisamment grand,

$$\mathcal{C} \cap B_{n/\rho} \subset \mathcal{C}_n.$$

Il vient directement du théorème ergodique que $\#(\mathcal{C} \cap B_{n/\rho})/(2n+1)^d$ a presque sûrement une limite non nulle. Par conséquent, $\#\mathcal{C}_n/(2n+1)^d$ possède preque sûrement une $\liminf$ non nulle.

Annexe B

Volume des Trous

Nous donnons la preuve du Lemme 1.3.5 due à Mathieu [M08], dans le cas de la percolation sur les sites, qui sera aussi vraie pour la percolation sur les arêtes. Nous rappelons l'énoncé du lemme.

Lemme B.0.5 *Il existe $\bar{p} < 1$ tel que pour $p > \bar{p}$, pour toute réalisation de la percolation sur les arêtes de paramètre p et pour n suffisamment grand, toute composante connectée du complémentaire de l'amas de percolation infini $\mathcal{C}$ qui intercepte la boîte $[-n, n]^d$ a un volume plus petit que $(\log n)^{5/2}$.*

Par la percolation sur les sites de paramètre r sur $\mathbb{Z}^d$, Nous entendons la mesure produit de Bernoulli de paramètre r sur l'ensemble des applications $\omega : \mathbb{Z}^d \to \{0, 1\}$. Chaque application est considérée comme étant un sous-graphe de la grille dont les sites sont les point $x \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\omega(x) = 1$. Les arêtes de ce sous-graphe sont celles de la grille $\mathbb{Z}^d$ qui relient deux sites x, y tels que $\omega(x) = \omega(y) = 1$.

Soit $l > 0$. Appelons un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ *l-connecté* s'il est connecté pour la structure de graphe définie par : deux points sont voisins quand la distance Euclidienne entre eux est inférieure à l.

Un *chemin* π est une séquence de sites de $\mathbb{Z}^d$ tels que deux sites successifs dans π sont voisins. Nous considérons principalement les chemins injectifs (i.e. sans noeuds). Avec un petit abus de vocabulaire, une séquence de sites de $\mathbb{Z}^d$ dans laquelle deux sites successifs sont à distance inférieure à l sera appelée un $l-$chemin. Soit $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ une séquence de sites. Nous définissons sa longueur par

$$|\pi| = \sum_{i=1}^{k} |x_{i-1} - x_i|,$$

et son cardinal par $\#\pi = \#\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ($\#\pi = k + 1$ pour les chemins injectifs).

Nous avons besoin de connaître auparavant la propriété géométrique suivante.

Lemme B.0.6 *Soit $l > 0$. Il existe $p_1 > 0$ tel que pour $r < p_1$, presque toute réalisation de la percolation sur les sites de paramètre r possède un nombre fini de composantes $l-$connectées et, pour n suffisamment grand, toute composante $l-$connectée qui intercepte la boîte $[-n, n]^d$ a un volume inférieur à $(\log n)^{6/5}$.*

Démonstration. Le nombre d'ensembles $l-$connectés qui contiennent un site fixé et de volume m est inférieur à $e^{ma(l)}$ pour une constante $a(l)$, voir [Grim99]. Ainsi le nombre d'ensembles $l-$connectés de volume m qui interceptent la boîte $[-n,n]^d$ est inférieur à $(2n+1)^d e^{a(l)m}$. Cependant, la probabilité qu'un ensemble donné de volume m contienne seulement des sites ouverts est $r^m \leq p_1^m$. Nous choisissons maintenant p_1 assez petit tel que $\sum_n \sum_{m \geq (\log n)^{6/5}} (2n+1)^d e^{a(l)m} p_1^m < \infty$ et le lemme de Borel-Cantelli nous assure la conclusion du Lemme B.0.6. □

Comme dans le cas de la percolation sur les arêtes discuté dans l'introduction, il est bien connu que pour r plus grand qu'une certaine valeur critique, alors presque toute réalisation de la percolation sur les sites possède une composante connectée infinie—l'amas infini—que nous noterons par $\mathcal{C}$.

Preuve du Lemme 3.2.1. Soit ω une réalisation de la percolation sur les sites de paramètre r. Nous supposerons que r est supérieur à la probabilité critique de sorte qu'il existe un amas infini unique, $\mathcal{C}$. Nous supposerons aussi que $1 - r < p_1$ où p_1 est la valeur fournie par le Lemme B.0.6 pour $l = d$.

Soit A une composante connectée du complémentaire de $\mathcal{C}$. Définissons la frontière intérieure de A : $\partial_{int} A = \{x \in A : \exists y \,\text{t.q.}\, (x,y) \in \mathbb{B}^d \,\text{et}\, y \notin A\}$. Il est connu que $\partial_{int} A$ est $d-$connecté, voir [DeuPis96], Lemma 2.1. Par construction, tout $x \in \partial_{int} A$ satisfait $\omega(x) = 0$. Comme l'application $x \mapsto 1 - \omega(x)$ est une réalisation de la percolation sur les sites de paramètre $1 - r$ et $1 - r < p_1$, il vient alors du Lemme B.0.6 que $\partial_{int} A$ est finie. Comme nous savons déjà que le complémentaire de A est infini (car il contient $\mathcal{C}$), ceci implique que la composante A elle-même est finie.

Nous supposons que A intercepte la boîte $[-n,n]^d$. Choisissons n tel que $\mathcal{C} \cap [-n,n]^d \neq \emptyset$ et que $[-n,n]^d$ n'est pas un sous-ensemble de A. Ainsi $\partial_{int} A$ doit intercepter $[-n,n]^d$. En appliquant encore une fois le Lemme B.0.6, nous obtenons que pour n suffisamment grand le volume de $\partial_{int} A$ est plus petit que $(\log n)^{6/5}$. L'inégalité isopérimétrique classique vue dans l'introduction implique alors qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $\# A \leq \kappa (\# \partial_{int} A)^{d/(d-1)} \leq \kappa (\log n)^{6d/5(d-1)}$. Comme $6d/5(d-1) < 5/2$, la preuve est complète. □

Annexe C

Inégalité de Carne-Varopoulos

Considérons le processus de Markov $(X_t, t \geq 0)$ dans un environnement ω défini de sorte que sous la loi P_0^ω, ce processus attend un temps exponentiel de papramètre 1 avant de sauter dans un site voisin suivant la matrice de transition

$$P_\omega(x, y) = \frac{\omega_{xy}}{\pi_\omega(x)}.$$

Le processus X_t peut être regardé comme étant le processus Y_{N_t}, où $(Y_k, k \in \mathbb{N})$ est la marche aléatoire à temps discret sur ω associée à la matrice de transition P_ω et N_t est un processus de Poisson de paramètre 1.

Rappelons-nous les notions vues dans la section 3.2. La mesure $\eta^\omega(x) = \sum_y \omega^\xi(x, y)$ étant réversible pour le processus X^ξ (et aussi pour $Y^\xi :=$ le processus à temps discret associé à X^ξ), les probabilités de transition satisfont l'inégalité de Carne-Varopoulos : rappelons que 0 est supposé appartenir à $\mathcal{C}^\xi$ et soit $x \in \mathbb{Z}^d$. De [Car85], nous savons que

$$P_0^\omega(Y_k^\xi = x) \leq 2\sqrt{\frac{\eta^\omega(x)}{\eta^\omega(0)}} e^{-|x|^2/(2k)}. \tag{C.0.1}$$

où nous utilisons ici $|\cdot|$ pour noter la L_1−norme $|\cdot|_1$.

Observons que $\eta^\omega(x)/\eta^\omega(0) \leq 2d/\xi$, comme nous avons supposé que $0 \in \mathcal{C}^\xi$.

Par conséquent, de (C.0.1), nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} P_0^\omega(X^\xi(t) = x) &\leq Ce^{-|x|^2/(4t)} + P_0^\omega(N_t \geq 2t) \\ &\leq Ce^{-|x|^2/(4t)} + e^{-ct} \end{aligned} \tag{C.0.2}$$

où $c = \log 4 - 1$ et C est une constante numérique qui ne dépend pas de $t, 0, x$ ou n.

Soit maintenant τ_n le temps de sortie de X^ξ de B_{n-1}. Ainsi, $\sigma_n = N_{\tau_n}$, où σ_n est le temps de sortie du processus Y^ξ. Alors

$$\begin{aligned}
P_0^\omega(\sigma_n \le k) &= \sum_{i=0}^{k} P_0^\omega(\sigma_n = i) \\
&\le \sum_{i=0}^{k} \sum_{y\in B_{2n}\backslash B_{n-1}} P_0^\omega(Y_i^\xi = y) \\
&\le c\sum_{i=0}^{k} \sum_{y\in B_{2n}\backslash B_{n-1}} e^{-|y|^2/(2i)}
\end{aligned}$$

(grâce à l'inégalité de Carne-Varopoulos). Maintenant comme $y \in B_{2n}\backslash B_{n-1} \Rightarrow |y| \ge n$, nous obtenons la borne supérieure suivante :

$$P_0^\omega(\sigma_n \le k) \le Ckn^{d-1}e^{-n^2/(2k)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
P_0^\omega(\tau_n \le t) &\le P_0^\omega(\sigma_n \le 2t) + P_0^\omega(N_t \ge 2t) \\
&\le Ctn^{d-1}e^{-n^2/(4t)} + e^{-ct} \qquad \text{(C.0.3)}
\end{aligned}$$

pour une constante c.

Annexe D

Noyau de la chaleur du Processus sur l'amas fort

Nous donnons ici une preuve du Lemme 3.2.3 tirée des articles de Mathieu et Rémy [MR04]–[M08], que nous énonçons de nouveau ici.

Lemme D.0.7 *Il existe une constante c telle que $\mathbb{Q}_0^\xi$-p.s. pour tout t suffisamment grand, nous avons*

$$P_0^\omega(X^\xi(t) = y) \leq \frac{c}{t^{d/2}}, \quad \forall y \in \mathbb{Z}^d \tag{D.0.1}$$

Soit $(X_n^\xi(t), t \geq 0)$ la marche aléatoire X^ξ restreinte à l'ensemble $\mathcal{C}_n$ la plus large composante connexe de $\mathcal{C} \cap [-n,n]^d$. La définition de X_n^ξ est la même que pour X^ξ excepté que les sauts à l'extérieur de $\mathcal{C}_n$ sont interdits. Sa forme de Dirichlet est

$$\mathcal{E}^{\xi,\omega,n}(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{x \sim y \in \mathcal{C}_n} \omega^\xi(x,y)(f(x) - f(y))^2.$$

Nous utiliserons la notation $\alpha(e) = \mathbf{1}_{\{\omega(e)>0\}}$. Notons que les variables aléatoires $(\alpha(e); e \in \mathbb{B}^d)$ sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre commun $\mathbb{Q}(\alpha(e) > 0) = \mathbb{Q}(\omega(e) > \xi)$. Comme nous avons supposé que $\mathbb{Q}(\omega(e) > \xi) > p_c$, l'environnement α est une réalisation typique de la percolation sur les arêtes dans $\mathbb{Z}^d$.

L'inégalité isopérimétrique (1.5.3) que nous rappelons ici

$$I_{\epsilon(n)}(\mathcal{C}_n) \geq \frac{B}{n^{1-d/\epsilon(n)}}, \tag{D.0.2}$$

où $\epsilon(n) = d + 2d\frac{\log\log n}{\log n}$, nous donne (voir [Sa97]) des estimées sur le noyau de la chaleur de X_n^ξ. En effet, l'inégalité (D.0.2) implique l'inégalité de Nash : il existe une constante β telle que $\mathbb{Q}_0^\xi$−p.s. $\exists n_0(\omega)$, et $\forall n \geq n_0(\omega)$, pour toute fonction $f\ : \mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Var}(f)^{1+2/\epsilon(n)} \leq \beta n^{2(1-\frac{d}{\epsilon(n)})} \mathcal{E}^{\alpha,n}(f,f) \|f\|_1^{4/\epsilon(n)} \tag{D.0.3}$$

où

$$\mathcal{E}^{\alpha,n}(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{x\sim y\in\mathcal{C}_n} \alpha(x,y)(f(x)-f(y))^2.$$

La variance et la norme L_1 sont calculées par rapport à la mesure de comptage sur $\mathcal{C}_n$. L'inégalité (D.0.3) est une application directe du Théorème 3.3.11 de [Sa97].

L'inégalité (3.2.3) entraîne que $\alpha(x,y) \leq \xi^{-1}\omega^{\xi}(x,y)$. Par conséquent, $\mathcal{E}^{\alpha,n}$ et $\mathcal{E}^{\xi,\omega,n}$ satisfont l'inégalité

$$\mathcal{E}^{\alpha,n}(f,f) \leq \frac{1}{\xi}\mathcal{E}^{\xi,\omega,n}(f,f). \tag{D.0.4}$$

Utilisant l'inégalité (D.0.4) dans l'inégalité de Nash précédente, nous déduisons qu'il existe une constante β (qui dépend de ξ) telle que $\mathbb{Q}_0^{\xi}-$p.s. pour n assez grand, pour toute fonction $f\ :\mathcal{C}_n \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Var}(f)^{1+2/\epsilon(n)} \leq \beta n^{2(1-\frac{d}{\epsilon(n)})}\mathcal{E}^{\xi,\omega,n}(f,f)\|f\|_1^{4/\epsilon(n)}, \tag{D.0.5}$$

ce qui entraîne (voir Théorème 2.3.1 de [Sa97]) les estimées sur les probabilités de transition :

$$\sup_{x,y\in\mathcal{C}_n}\left|\frac{1}{\#\mathcal{C}_n} - P_x^{\omega}(X_n^{\xi}(t)=y)\right| \leq \left(\frac{4\epsilon(n)}{\beta^2}\right)^{\epsilon(n)/2}\frac{n^{\epsilon(n)-d}}{t^{\epsilon(n)/2}} \tag{D.0.6}$$

Nous avons d'après l'inégalité (C.0.2)

$$P_0^{\omega}(X^{\xi}(t)=x) \leq Ce^{-|x|^2/(4t)} + e^{-ct}.$$

Cas 1. Si $|x|^2 \geq 2dt\log t$, alors $e^{-|x|^2/(4t)} \leq Ct^{-d/2}$ et aussi $e^{-ct} \leq Ct^{-d/2}$, pourvu que t est suffisamment grand.

Cas 2. Si $|x|^2 < 2dt\log t$.

Choisissons $t\log t = bn^2$ avec $b < \frac{1}{4d+2}$ et soit τ_n le temps de sortie de $X^{\xi}(t)$ de la boîte B_{n-1}. Alors

$$P_0^{\omega}(X^{\xi}(t)=x) \leq P_0^{\omega}(X_n^{\xi}(t)=x) + P_0^{\omega}(\tau_n \leq t).$$

Les inégalités (A.0.1)–(C.0.3)–(D.0.6) nous donnent

$$P_0^{\omega}(X^{\xi}(t)=x) \leq n^{-d} + \left(\frac{4\epsilon(n)}{\beta^2}\right)^{\epsilon(n)/2}\frac{n^{\epsilon(n)-d}}{t^{\epsilon(n)/2}} + Ctn^{d-1}e^{-n^2/(4t)} + e^{-ct}.$$

Considérons les termes à droite de la dernière inégalité terme par terme :

1. $n^{-d} = \left(\frac{t\log t}{b}\right)^{-d/2} \leq t^{-d/2}$, quand t est suffisamment grand.

2.
$$\begin{aligned}
\left(\frac{4\epsilon(n)}{\beta^2}\right)^{\epsilon(n)/2} \frac{n^{\epsilon(n)-d}}{t^{\epsilon(n)/2}} &\leq \frac{C'}{t^{d/2}} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4\epsilon(n)}{\beta^2}\right)^{\epsilon(n)/2} \left(\frac{n^2}{t}\right)^{(\epsilon(n)-d)/2} \leq C' \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4\epsilon(n)}{\beta^2}\right)^{\epsilon(n)/2} \left(\frac{\log t}{b}\right)^{(\epsilon(n)-d)/2} \leq C' \\
&\Leftrightarrow \log K + d\frac{\log\log n}{\log n} \log\left(\frac{\log t}{b}\right) \leq \log C',
\end{aligned}$$

avec $K = \left(\frac{4\epsilon}{\beta^2}\right)^{\epsilon/2}$. Comme $\frac{\log\log n}{\log n} \log\log t \to 0$, ceci est vrai pour t assez grand et une constante C'.

3.
$$\begin{aligned}
Ctn^{d-1}e^{-n^2/(4t)} + e^{-ct} &\leq \frac{C'}{t^{d/2}} \\
&\Leftrightarrow \log t + (d-1)\log n + \frac{d}{2}\log t \leq \log\frac{C'}{C} + \frac{n^2}{4t} \\
&\Leftrightarrow \log t + (d-1)\log n + \frac{d}{2}\log t \leq \log\frac{C'}{C} + \frac{\log t}{4b} \\
&\Leftrightarrow \left[\frac{1}{4b} - 1 - \frac{d}{2}\right]\log t + \log\frac{C'}{C} \geq (d-1)\log n,
\end{aligned}$$

et ceci est bon si $2\left[\frac{1}{4b} - 1 - \frac{d}{2}\right] \geq d-1$, ceci étant, si b satisfait $b < \frac{1}{4d+2}$.

4. Le dernier terme, e^{-ct}, décroit clairement plus vite que $t^{-d/2}$.

Bibliographie

[AlOr82] S. Alexander and R. Orbach. (1982). *Density of states on fractals : fractons.* J. Physique (Paris) Lett. **43**, 625-631.

[AnPis96] P. Antal and A. Pisztora. (1996). *On the chemical distance for supercritical Bernouilli percolation.* Ann. Probab., Vol. **24**, 1036-1048.

[Ba04] M.T. Barlow. (2004). *Random walks on supercritical percolation clusters.* Ann. Probab., Vol. **32**, no. 4, 3024–3084.

[BaCoKu05] M.T. Barlow, T. Coulhon and T. Kumagai. (2005). *Characterization of sub-Gaussian heat kernel estimates on strongly recurrent graphs.* Comm. Pure Appl. Math. Vol. **58**, 1642–1677.

[BaDeu04] M.T. Barlow and J.-D. Deuschel. (2010). *Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances.* Ann. Probab. Vol. **38**, 234–276 Ann. Probab.

[BaJáKuSl08] M.T. Barlow, A. A. Járai, T. Kumagai and G. Slade. (2008). *Random Walk on the Incipient Infinite Cluster for Oriented Percolation in High Dimensions.* Commun. Math. Phys. Vol. **278**, 385-431.

[BaKu06] M.T. Barlow and T. Kumagai (2006). *Random walk on the incipient infinite cluster on trees.* Illinois J. Math. Vol. **50**, 33-65.

[BB07] N. Berger and M. Biskup. (2007). *Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **137**, no. 1-2, 83-120.

[BBHK08] N. Berger, M. Biskup, C. E. Hoffman and G. Kozma. (2008). *Anomalous heat-kernel decay for random walk among bounded random conductances.* Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist., Vol. **44**, no. 2, 374-392.

[Berg08] N. Berger. (2008). *Limiting velocity of high-dimensional random walk in random environment.* Anna. Probab., Vol. **36**, no. 2, 728-738.

[BezGrim0] C. Bezuidenhout, G. Grimmett. (1990). *The critical contact process dies out.* Ann. Probab. 18, 1462-1482.

[Bo09a] O. Boukhadra. (2009). *Heat-kernel estimates for random walk among random conductances with heavy tail.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. **120**, no. 2, 182-194.

[Bo09b] O. Boukhadra. (2009). *Return probabilities of random walks among polynomial lower tail random conductances* Preprint `arXiv:0907.4525v2 [math.PR]`.

[BP07] M.Biskup and T.M. Prescott. (2007). *Functional CLT For Random Walk Among Bounded Random Conductances*. Electron. J. Probab., Vol. **12**, no. 49, 1323–1348.

[Brém02] J. Brémont. (2002). *Marches aléatoires en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$; Dynamique d'applications localement contractantes sur le cercle*. Thèse, Université de Rennes I.

[Car85] T. K. Carne. (1985). *A transmutation formula for Markov chains*. Bull. Sci. Math. Vol. **109**, 399-405.

[CGZ00] F. Comets, N. Gantert, and O. Zeitouni. (2000). *Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **118**(1), 65-114.

[Cher67] A. A. Chernov. (1967). *Reduplication of a multicomponent chain by the mechanism of "lightning"*. Biophysica, Vol. **12**, 297-301.

[CKS87] E. Carlen, S. Kusuaka, D. Strook. (1987). *Upper bounds for symmetric transitions functions.* Ann. Inst. H. Poincaré, Proba., Stat., Vol. **23**, 245-287.

[Coul95] T. Coulhon. (1995). *Ultracontractivity and Nash types inequalities.* J. Func. Anal., , 141, 2 (1996) 510-539.

[CouSa90a] T. Coulhon and L. Saloff-Coste. (1990). *Marches aléatoires non-symétriques sur les groupes unimodulaires.* C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. **310**, 627-630.

[CouSa90b] T. Coulhon and L. Saloff-Coste. (1990). *Puissances d'un opérateur régularisant*. Ann. Inst. H. Poincaré, Proba., Stat., Vol. **23**, 419-436.

[Croy08a] D. Croydon. (2008). *Volume growth and heat kernel estimates for the continuum random tree*. Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **140**(12), 207-238.

[Croy08b] D. Croydon. (2008). *Convergence of simple random walks on random discrete trees to Brownian motion on the continuum random tree*. Ann. Inst. H. Poincar Probab. Statist. Vol. **44**, no. 6, 987-1019.

[Del99] T. Delmotte. (1999). *Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs*. Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. **15**, no. 1, 181-232.

[DelRau09] T. Delmotte and C. Rau. (2009). *Exit time for anchored expansion* arXiv :0903.3892v1 [math.PR].

[DeuPis96] J.-D. Deuschel and A. Pisztora. (1996) : *Surface order deviations for high density percolation*. Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **104**, 467-482.

[DFGW85] A. De Masi, P.A. Ferrari, S. Goldstein and W.D. Wick. (1985). *Invariance principle for reversible Markov processes with application to diffusion in the percolation regime.* In : *Particle Systems, Random Media and Large Deviations (Brunswick, Maine)*, pp. 71–85, *Contemp. Math.*, **41**, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[DFGW89] A. De Masi, P.A. Ferrari, S. Goldstein and W.D. Wick. (1989). *An invariance principle for reversible Markov processes. Applications* *to random motions in random environments.* J. Statist. Phys., Vol. **55**, no. 3-4, 787-855.

[DGPZ02] A. Dembo, N. Gantert, Y. Peres, and O. Zeitouni. (2002). *Large deviations for random walks on Galton-Watson trees : averaging and uncertainty.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **122**(2), 241-288.

[DGZ02] A. Dembo, N. Gantert and O. Zeitouni. (2002). *Large deviations for random walks on Galton-Watson trees : averaging and incertainty.*Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **122**. pp 241-288.

[DPZ96] A. Dembo, Y. Peres, and O. Zeitouni. (1996). *Tail estimates for one-dimensional random walk in random environment.* Comm. Math. Phys., Vol. **181**(3), 667-683.

[Duv06] A. Devulder. (2006). *Some properties of the rate function of quenched large deviations for random walk in random environment.* Markov Process. Related Fields, Vol. **12**(1), 27-42.

[FM06] Fontes, L.R.G and Mathieu, P. (2006). *On symmetric random walks with random conductances on* $\mathbb{Z}^d$. Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **134**, no. 4, 565-602.

[GanZei98] N. Gantert and O. Zeitouni. (1998). *Quenched sub-exponential tail estimates for one-dimensional random walk in random environment.* Comm. Math. Phys., Vol. **194**(1), 177-190.

[GanZei99] N. Gantert and O. Zeitouni. (1999). *Large deviations for one-dimensional random walk in a random environment–a survey. In Random walks* (Budapest, 1998), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. **9**. Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, pp. 127-165.

[Gol86] A. O. Golosov (1986). *Limit distributions for random walks in random environments.* Soviet Math. Dokl., Vol. **28**, 18-22.

[GreHol94] A. Greven and F. Den Hollander. (1994). *Large deviations for a random walk in random environment.* Ann. Probab., Vol. **22**, n.3, 1381-1428.

[Grim99] G. Grimmett. (1999). *Percolation (Second edition)*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. **321**. Springer-Verlag, Berlin.

[HH05] D. Heicklen and Hoffman, C. (2005). *Return probabilities of a simple random walk on percolation clusters.* Electron. J. Probab., Vol. **10**, no. 8, 250-302 (electronic).

[HorJoh85] Horn, R., and Johnson, Ch. (1985). *Matrix Analysis.* Cambridge University Press.

[Hug95] B. D. Hughes. (1995). *Random walks and random environments. Volume 1 : Random walks.* Oxford University ; Oxford University Press.

[Hug96] B. D. Hughes. (1996). *Random walks and random environments. Volume 2 : Random environments.* Oxford University ; Oxford University Press.

[Kal81] S. A. Kalikow. (1981). *Generalized random walk in a random environment.* Ann. Probab. Vol. **9**, 753-768.

[Kes73] H. Kesten. (1973). *Random difference equations and renewal theory for products of random matrices.* Acta Math., Vol. **131**, 207-248.

[Kes86a] H. Kesten. (1986). *The limit distribution of Sinais random walk in random environment.* Phys. A, Vol. **138**(1-2), 299-309.

[Kes86b] H. Kesten. (1986). *The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **73**, 369-394.

[Kes86c] H. Kesten. (1986). *Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster.* Ann. Inst. H. Poincar Probab. Statist. Vol. **22**, 425-487.

[Key84] E. S. Key. (1984). *Recurrence and transience creteria for random walk in random environment.* Anna. Probab., Vol. **12**, 529-560.

[KipVar86] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. (1986). *Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions.* Communications in Mathematical Physics, Vol. **104**, no. 1, 1-19.

[KKS86] H. Kesten, M. V. Kozlov, and F. Spitzer. (1975). *A limit law for random walk in a random environment.* Compositio Math., Vol. **30**, 145-168.

[KuMi08] T. Kumagai and J. Misumi (2008). *Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media*, Journal of Theoretical Probability, to appear.

[LPP95] R. Lyons, R. Pemantle and Y. Peres. (1995). *Ergodic theory on Galton-Watson trees : speed of random walk and dimension of harmonic measure.* Ergodic Theory Dyn. Systems, Vol. **15**, pp, 593-619.

[LPP96] R. Lyons, R. Pemantle and Y. Peres. (1996). *Biased random walk on Galton-Watson trees.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **106**, pp, 249-264.

[LyoPer05] R. Lyons and Y. Peres. (2005). *Probability on Trees and Netwoks.* http ://mypage.iu.edu/ rdlyons/

[M08] P. Mathieu. (2008). *Quenched invariance principles for random walks with random conductances..* J. Statist. Phys., Vol. **130**, no. 5, 1025-1046.

[MPer05] B. Morris and Y. Peres (2005).*Evolving sets, mixing and heat kernel bounds.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **133**, no. 2, 245-266.

[MPia04] P. Mathieu and A.L. Piatnitski (2007). *Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters.* Proceedings A of the Royal Society, Vol. **463**, 2287-2307.

[MR04] P. Mathieu and E. Remy. (2004). *Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters.* Ann. Probab., Vol. **32**, no. 1A, 100-128.

[MZer02] M. P. W. Zerner. (2002). *A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment.* Electron. Comm. Probab., Vol. **7**, 191-197 (electronic).

[MZerM01] M. P. W. Zerner and F. Merkl. (2001). *A zero-one law for planar random walks in random environment.* Ann. Probab., Vol. **29**(4), 1716-1732.

[Piau98] D. Piau. (1998). *Théorème central limite fonctionnel pour une marche au hasard en environnement aléatoire sur $\mathbb{Z}$.* Ann. Probab., Vol. **26**, no. 3, pp. 1016-1040.

[PisPo99] A. Pisztora and T. Povel (1999). *Large deviation principle for random walk in a quenched random environment in the low speed regime.* Ann. Probab., Vol. **27**(3), 1389-1413.

[PitSa97] L. Saloff-Coste and Ch. Pittet. (1997). *A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry, and the behavior of simple random walk on Cayley graphs, with examples.* Preprint.

[Sa97] L. Saloff-Coste. (1996). *Lectures on finite Markov chains. Lectures on probability theory and statistics* (Saint-Flour, 1996), Lecture Notes in Math. 1665, Springer, Berlin, 301413.

[Sin82] Y. G. Sinai. (1982). *The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment.* Teor. Veroyatnost. i Primenen., Vol. **27**, n2, 247-258.

[Sla06] G. Slade. (2006). *The Lace Expansion and its Applications.* Lecture Notes in Mathematics Vol. **1879**. Ecole de de Probabilits de Saint-Flour XXXIV2004, Berlin : Springer.

[Sol75] F. Solomon. (1975). *Random walks in a random environment.* Ann. Proba., Vol. **3**, 1-31.

[SSz04] V. Sidoravicius and A.-S. Sznitman. (2004). *Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances.* Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **129**, no. 2, 219-244.

[Sz98] A-S. Sznitman. (1998). *Brownian motion, obstacles and random media.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

[Sz01] A-S. Sznitman. (2001). *On a class of transient random walks in random environment.* Ann. Probab., Vol. **29**(2), 724-765.

[Sz02] A-S. Sznitman. (2002). An effective criterion for ballistic behavior of random walks in random environment. Probab. Probab. Theory Rel. Fields., Vol. **122**(4), 509-544.

[Sz03] A-S. Sznitman. (2003). *On new examples of ballistic random walks in random environment.* Ann. Probab., Vol. **31**(1), 285-322.

[SzZer99] A-S. Sznitman. and M. P. W. Zerner. (1999). *A law of large numbers for random walks in random environment.* Ann. Probab., Vol. **27**, 1851-1869.

[Tem72] D. E. Temkin. (1972). *One-dimensional random walks in a two-component chain.* Soviet math. Dokl., Vol. **13**, 1172-1176.

[vaHHSla02] R. van der Hofstad, F. den Hollander and G. Slade. (2002). *Construction of the incipient infinite cluster for spreadout oriented percolation above $4 + 1$ dimensions.* Commun. Math. Phys. Vol. **231**, 435461.

[vaHJá04] R. van der Hofstad and A.A. Járai. (2004). *The incipient infinite cluster for high-dimensional unoriented percolation.* J. Statist. Phys. Vol. **114**, 625-663.

[Var02] S. R. S. VARADHAN. (2002). *Large deviations for random walks in random environment.* Communications on Pure and Applied mathematics. Vol. **56**, **8**, pp. 1222-1245.

[Varo85] N. VAROPOULOS. (1985). *Semigroupes d'opérateurs sur les espaces L^p.* CRAS 301, série I, 865-868.

[Woe00] W. WOESS. (2000). *Random walks on infnite graphs and groups.* Cambridge tracts in Mathematics (138), Cambridge university press.

[Yil07] A. YILMAZ. (2007).*Large deviations for random walk in a space-time product environment.* arXiv :0711.4872v2 [math.PR].

[Yil08] A. YILMAZ. (2008). *Quenched large deviations for random walk in a random environment.* arXiv :0804.0262v2 [math.PR]

[Yil08] A. YILMAZ. (2008). *Averaged large deviations for random walk in a random environment.* arXiv :0809.3467v2 [math.PR].

[Yil09] A. YILMAZ. (2009). *On the equality of the quenched and averaged large deviation rate functions for high-dimensional ballistic random walk in a random environment.* arXiv :0903.0410v1 [math.PR].

[YilZeit09] A. YILMAZ. AND O. ZEITOUNI. (2009). *Differing averaged and quenched large deviations for random walks in random environments in dimensions two and three.* arXiv :0910.1169v1 [math.PR]

[Zin07] O. ZINDY. (2007). *Marches aléatoires en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$: études de localisation dans les cas récurrent et transient.* tel-00158859, version 1-29 Juin 2007.

[Zeit04] O. ZEITOUNI. (2004). *Random walks in random environment.* Lectures on probability theory and statistics, Lecture Notes in Math., 1837. Berlin : Springer, pp. 189-312.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude d'une classe importante de marches aléatoires en milieu aléatoire, appelée Marches aléatoires avec conductances aléatoires. Nous présentons trois principaux résultats montrant des comportements opposés, *irrégulier* et *standard* du noyau de la chaleur des marches aléatoires avec conductances aléatoires à queue polynômiale. Les deux premiers (cf. Chapitre 2) portent sur les marches aléatoires simples dans $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$, gouvernées par une famille de conductances aléatoires i.i.d. $\omega_{xy} \in [0,1]$, avec une queue polynômiale d'exposant $\gamma > 0$ au voisinage de 0. Nous montrons en premier lieu pour tout $d > 4$ que la probabilité de retour $P_\omega^{2n}(0,0)$ décroit de façon irrégulière en ce sens qu'elle admet une borne inférieure que l'on peut rendre, à un terme sous-polynomial près, aussi proche que l'on veut de n^{-2} en laissant le paramètre γ tendre vers l'infini. En considérant le même modèle et à l'opposé du premier résultat, nous montrons en second lieu pour tout $d \geq 2$ que le noyau de la chaleur de la marche aléatoire admet une borne supérieure que l'on peut rendre, à un terme sous-polynômial près, aussi proche que l'on veut de la borne standard $n^{-d/2}$ en laissant le paramètre γ tendre vers l'infini. Nous considérons dans le troisième résultat (cf. Chapitre 3) les mêmes chaînes de Markov mais en temps continu et étudions la décroissance de la probabilité de retour $P_\omega^t(0,0)$, quand t tend vers $+\infty$. Nous prouvons pour tout $\gamma > \frac{d}{2}$ que la borne standard se révèle être le bon ordre *logarithmique*, i.e.,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log P_0^\omega(X_t = 0)}{\log t} = -\frac{d}{2}.$$

Une conséquence prévisible de ce résultat est que ceci reste tout aussi vrai en temps discret.

Mots-Clés : Processus stochastiques, Chaînes de Markov, Marches aléatoires, Milieux aléatoires, Percolation.
AMS 2000 subject classification : 60G50 ; 60J10 ; 60K37.

Abstract

This thesis deals with an important class of RWRE called Random walks among random conductances. We give tree principal results showing opposite behaviors, *anomalous* and *standard*, of the heat-kernel of random walks among polynomial lower tail random conductances. The first two results (cf. Chapter 2) concern discrete-time, symmetric, $\mathbb{Z}^d$-valued random walks in random environments, driven by a field of i.i.d. random nearest-neighbor conductances $\omega_{xy} \in [0,1]$, with polynomial tail near 0 with exponent $\gamma > 0$. We first prove for all $d \geq 5$ that the return probability shows an anomalous decay (non-gaussian) that approaches (up to sub-polynomial terms) a random constant times n^{-2} when we push the power γ to zero. In contrast, we prove that the heat-kernel decay is, in a logarithmic sense, as close as we want to the standard decay $n^{-d/2}$ for large values of the parameter γ.
We consider in the third result (cf. Chapter 3) the same Markov chains in the continuous-time case and study the decreasing of the return probability $P^t_\omega(0,0)$, when t tends to $+\infty$. We show that for $\gamma > \frac{d}{2}$, the standard bound turns out to be of the correct logarithmic order, i.e.,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log P_0^\omega(X_t = 0)}{\log t} = -\frac{d}{2}.$$

As an expected consequence, the same result holds for the discrete-time case.

Keywords : Stochastic processes, Markov chains, Random walks, Random environments, Random conductances, Percolation.
AMS 2000 subject classification : 60G50 ; 60J10 ; 60K37.